複素多項式の特異点とそのリンクのトポロジー

数学専攻 山本 潤

1 はじめに

これまでの研究の全体像について述べる. 最初のきっかけは, 複素多項式

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \\ x^2 + y^3 \\ x^2 + \varepsilon y^2 + y^3 \\ (\varepsilon > 0) \end{cases}$$

等に対し, \mathbb{C}^2 内の図形, f(x, y) = 0で定まる代数多様体 $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; f = 0\}$ のトポロジー についての研究であった. つまり, 低い次数の (複素 2 変数) 多項式特異点の単純な link が, 特異点を 複雑にするとどう変化するかを Milnor fibration の理論として調べていた. 例えば $x^2 + y^2 = 0$ と $x^2 + y^3 = 0$ を比較するとき, $x^2 + cy^2 + y^3 = 0$ として $c \to 0$ としてみれば, 極限で, 高次のものに link が変わる. しかし, 一々切る半径に気を使わなければいけないので, c は固定して (0 でなけれ ば何でもよいから) 1 にして, 代わりに切る半径を変えることを考えた.

様々な多項式を取り上げ,実際に計算を行った.

計算を何度も行っているうちに、ある観察結果に到達した. それは以下のものである.

観察結果 1.1 2 変数複素多項式 $f(x,y) = x^p + x^q + y^m + y^n$ において, その特異点に付随する link K の x の射影の braid 表示は, 三次元球面 S³ の径の大きさに依存する. S³ の径が十分小さいと き, $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1})^p$ と表示できる. また, S³ の径が十分に大きいとき, $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1}\cdots\sigma_{n-1})^q$ と 表示できる. ただし, p < q, m < n とする. また, p, q, m, $n \in \mathbb{N}$ とする.

この観察結果は、(残念ながら)よく知られた、当たり前のものであったが、braidの元の表現と多 項式の特異点のlink との間の対応に関しての理論的な背景を考察することで、この現象への数学的な 解釈を得るに至った.

このように、Milnor fibration の理論は動機と背景にあるが、この研究の今までのところでは、それ ほど明には出てこない。

一方,計算と可視化のしやすさも考え,球面で切るのではなく,r = |y|一定のシリンダーで切り,x-平面への射影を考えることにした. すると Milnor ファイバーまたは特異曲面からの射影は正則写像 であるから,極めて強い特徴を持つ.

従って,

Milnor fibration の理論,
r に関する Morse 理論,
r = |*y*| に関する擬凸性, Levi-平坦性と*r* の調和性,
エ則射影の持つ正則写像として理論,

が理論的な屋台骨である.

Milnor fibration 定理について極簡単に説明する. 2 変数複素多項式関数 $f(x, y) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f の零点集合 $f^{-1}(0)$ を V とし、V と \mathbb{C}^2 内の原点を中心とする半径 ε の 3 次元球面 S^3_{ε} との共通部分 $V \cap S^3_{\varepsilon}$ を link K とする. このとき写像 $\phi : S^3_{\varepsilon} - K \rightarrow S^1$ と各ファイバーを

$$\phi(x,y) = \frac{f(x,y)}{|f(x,y)|}$$
$$F_{\theta} = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_{\varepsilon}^{3} - K$$

によって定める.

(x,y) が f の臨界点とは $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ となる点である. また, (x,y) が f の正則点 とは (x,y) が f の臨界点でないことである.

Morse 理論の基本定理を紹介する. Mをコンパクトな可微分多様体とする. 可微分関数 $g: M \to \mathbb{R}$ で g の臨界点が非退化であるものを Morse 関数という.

多様体 M 上の Moser 関数 g の Morse 指数 (Morse Index) とはそのヘッセ行列の対角化後の負の固 有値の数である.

(Morse 理論の基本定理)

Mをコンパクトな可微分多様体とし, $g: M \to \mathbb{R}$ を Morse 関数とする. gの臨界点を p_1, p_2, \dots, p_k とし, gの各点における指数を r_1, r_2, \dots, r_k とするとき, Mは r_1, r_2, \dots, r_k 次元胞体 $e^{r_1}, e^{r_2}, \dots, e^{r_k}$ を持つ有限CW複体にホモトピー同値である:

 $M \simeq e^{r_1} \cup e^{r_2} \cup \dots \cup e^{r_k}$

観察結果に対する理論的な考察を, $f = x^2 + y^2$ という最も簡単な多項式を使って, 以下に, 説明する. 最も本質的な現象が, この簡単な例で説明できるのだ.

 S^3 の代わりに |y| = rというシリンダーで V を切る.

 $x^2 + y^2 = 0$ (Hopf link) を y = 0 (x-複素直線) で f = 0 (Riemann 面) が横断的になるように, 一次 の項を使って摂動.(係数は何でも定性的な差がないので計算をしやすようにした.)

 $\begin{array}{l} f(x,y)=x^2-2x+y^2-2y ~ \mbox{if}~\mbox{$

Morse 関数の臨界点は, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ となる $V = \{f = 0\}$ の点である. Morse 臨界点 $(1, 1 - \sqrt{2})$ と $(1, 1 + \sqrt{2})$ の Morse 指数は 1.

Morse 関数 $h = r^2 = |y|^2$ などを使えば, (x, y) = (0, 0), (2, 0) で h = 0 となり h は最小. その Morse 指数は 0. h の臨界点は $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff x = 1$. V の点だから $y = 1 \pm \sqrt{2}$. また, $0 < |1 - \sqrt{2}| < 1 < 1$

一方, x- 複素直線への {f = 0} からの射影の特異点 (branch points) は $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ で得られる. そのとき, $y = 1, x = 1 \pm \sqrt{2}$. だから, $(x, y) = (1 - \sqrt{2}, 1), (1 + \sqrt{2}, 1)$ が x- 射影の branch points で h = 1.



$\boxtimes 1: V \cap \{|y| = r\}$

Morse 指数 1 の特異点 $(1, 1 - \sqrt{2})$ では, $|y| = 1 - \sqrt{2} - \varepsilon$ のシリンダーで切った特異点の link は, V の正則性という強い位相条件から正の向きに左右のリングが回っている (図 4). 零点集合 V は切るシ リンダーの大きさ, つまり |y| = rが大きくなると, 必ず, 内部の色付きの部分は一方的に広くなる. V は最初は Morse 指数 1 の特異点を含まないが, |y|が大きくなると, それを含む $(|y| = 1 - \sqrt{2})$ (図 6). そして, $|y| = 1 - \sqrt{2} + \varepsilon$ では交差が生じる.(図 8). この交差現象が, 実に本質的であり, h > 0のすべ ての Morse 特異点の指数は 1 であるし, その特異点に対応する交差はこのワンパターンしかない. 交 差が生じる=特異点を回る knot の回転数が 1 回転上がることに注意.

|y|を十分大きくすると、もうひとつの Morse 指数 1 の特異点 $(1, 1 + \sqrt{2})$ で同様の交差が生じる. braid 交差は Morse 指数 1 の特異点の数に対応して 2 度生じるので, Hopf link の表現である σ_1^2 が得られる.



図 3: $V \cap \{|y| = r\}(r + 3 \wedge z)$



図 4: 二つの自明な knot. x^2-2x-y^2-2y 特異点 link の x 平面への射影.

図 2: z 軸が y の大きさ. V の様子





 $| \mathfrak{A} 5: V \cap \{ |y| = r = 1 - \sqrt{2} \}$

図 6: x の射影. Morse Index 1 特異点



図 7: xの射影. $V \cap \{|y| = r = 1 - \sqrt{2} + \varepsilon\}$



図 8: xの射影.





図 9: 上は Riemann 面上の link. 下は *x*-平面への射影. 自明な braid. 図 4 に対応

図 10: Riemann 面上の link. 下 x の射 影. 図 8 に対応



図 11: 自明な braid



 \boxtimes 12: braid σ_1

観察結果に対する考察

これまでの研究の全体像を踏まえた上で、その観察結果についての考察を述べる.一般論として、次のように考えることができる.

与えられた多項式を $x \ge y$ の一次の項で摂動しておけばy = 0においてはxだけの多項式で,r十分小では r = -定で切ればその次数の分だけ自明な knot が出る.rを大きくしていくと我々のよく知っている

1) Morse 指数1の特異点での現象,

2) 正則射影の分岐点における現象を繰り返して複雑な姿に成長してく.

r > 0 では $\log r$ の調和性から, 臨界点の Morse 指数は 1 のみである. (球面で切って半径を大き くしていく場合は強擬凸性から Morse 指数 2 のみが排除される.)

また, *x*-平面への射影の正則性により, *r* が増加するとき, Riemann 面 *x*-平面への像は常に境界から外へと広がってゆく.

Riemann 面とその境界である knot の自然な向き付けを併せると, 臨界点の前後における振舞は, 図 4 から 12 に示したものしか起こりえないことが分かり 正の向きの braid が生じる. ここで, 正の向 きの braid とは, 組紐群 B_n の元, σ_1 , σ_2 , … σ_{n-1} を B_n の生成元としたとき, σ_1 と共役な元の合成 で表示されるものをいう.

一方, Riemann 面から *x*-平面への正則写像の分岐点では,境界曲線が正の向きに回転数1増やして自己交差を生じる. 組紐群の元としては,何も起こっていない.

これらを総合し, 最終的に, 正の向きの braid の合成として組紐群の元としての表示が与えられる ことになる.

今回は, 球面ではなく, シリンダー |y| = r で切ったため, 小さい球面で切るべき特異点 link をすべ て見ているとは断言できない. エンド (r 十分大) で安定しているところは, 球面で切ってもシリン ダーで切っても同じであることが容易に分かる. 多項式特異点の link(小さい球面で切った link) がエ ンド (十分に大きい球面切ったもの) に現れるように多項式を作り変えることができるなら総ての代 数的結び目に対応しているといえるのだが, このことは未確認である.

先ほどの Hopf link の例から, $x^2 + x^m + y^2 + y^n$ の特異点の link も同様に推し量ることができる. (braid 表示も一致.)

 $x^{2}(x^{m-2}+1)+y^{2}(y^{n-2}+1)$ として, |y|=r (> 0) を Morse 関数にとる. やはり, 原点から遠いとこ ろで m-2 個の自明な knot が生じる. 合わせて $\{y=0\}$ と m 回の交差である. ゆえに, r 小では特異 点の link は σ_{1}^{2} であり, r 大では $(\sigma_{1}\sigma_{2}\cdots\sigma_{n-1})^{m}$ と表示できるだろう.

これが観察結果に対する考察である.当たり前のことに過ぎないのかもしれない.ただ,この考察 に至るまでに、数ヶ月間に渡って、わたしなりの試行錯誤 (tries and errors)を繰り返すしかなかった. その試行錯誤を動機付けるのは、よく知られたソクラテスの「無知の知」の心持ちであったように思 う.誰もが知っている内容を調べていたのは事実ではあるが、当たり前の中にも、まだ、よくわからな い事象が (わたしの中には)存在する.だから、わかりきったとされ、見過ごされていることに対して も、「すべてをわかっている」という態度ではいけないのであろう.それは学問をする際の一般的な 態度に違いない.以降は、この考察に至るまでのわたしの「試行錯誤」である.試行錯誤であるが、そ れは、研究の内容を凝縮したものといえなくはないし、試行錯誤ではあるから、まとまりは欠いてしま う.そのことをご了承いただきたい.

2 研究の内容

2 変数複素多項式の特異点を単純なものから複雑なものへと変化させると link がどう変化するの であろうか. それが当初の問題意識であった.

準備として、いくつかの定義をしなければならない. fを複素 2 変数多項式とする. f は \mathbb{C}^2 から \mathbb{C} への連続な可微分な写像である.

すなわち, $f: \mathbb{C}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{C}$ また, 多項式は定数項を持たないと仮定する.

定義 2.1 (複素二変数多項式の特異点, 孤立特異点, 退化した特異点について) f の特異点とは $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ に対して, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ となる点である. 特異点 (x_0, y_0) がその近傍で唯一の特異点のとき, 孤立特異点という. 特異点における偏微分のヘッセ行列式がゼロ行列式となるとき, 退化した特異点という.

定義 2.2 多項式 f の特異点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ を f で写した値 $f(x_0, y_0) = z \in \mathbb{C}$ を特異値と呼ぶ.

定義 2.3 特異値集合とは, 特異値 zの逆像 $f^{-1}(z) \subset \mathbb{C}^2$ とする. 特に, 特異値が零である場合, 0 の 逆像 $f^{-1}(0)$ を零点集合 V という.

定義 2.4 特異値集合と 3 次元球面 S^3 との共通部分を link K と呼ぶ. $K = V \cap S^3$ である.

定数項と1次項がない2次以上の項だけでなる多項式を考えると, f を変数で偏微分しても, 1次以上の変数が残るから, 原点 $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ は f の特異点となり, f(0,0) = 0 だから特異値は零になる.

たとえば, $f(x,y) = x^2 + xy + y^5$ は各項が 2 次以上である. その偏微分は $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (2x+y, 5y^4+x)$ であり, 原点 (0,0) で偏微分が零であるから原点 (0,0) は特異点である. また, f(0,0) = 0 であるから 零は特異値である.

ここで、Morse 理論の基本定理を、その重要性から、復習を兼ねて、紹介する. わたしたちは、三次 元球面 S³の大きさに半径の大きさに依存する多項式の特異点の link のトポロジーの変遷を見る立場 である. このときの困難のひとつは、「S³が大きくなればなるほど、link のトポロジーは変化し続け るかもしれない」という可能性を除外しなければならないことにある. Mose 理論の基本定理を導入 することで、調べる多項式 f の特異点が有限個しかないこと、そして、それら特異点が非退化であるな らば、特異点の Morse 指数というものを周辺を調べるだけで、link K の様相がわかるのである. 本論 文では、後の章で、これから多くの link K の射影を図示する. そのとき、図示された範囲の外では、重 要なことは起こらないということを Morse 定理は保証してくれる.

定義 2.5 (Morse 関数)

Mをコンパクトな可微分多様体とする. 可微分関数 $g: M \to \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき, $g \in Morse$ 関数という.

qの特異点が非退化特異点である.

教科書によっては, 条件をもうひとつ付加しているものがあるが, Morse 関数が無数に存在することや, 同じ特異値を持つ特異点が現れても, 違う値を持つように容易に摂動できることがわかっているため, 本質的な条件は以上のものだけである.

定義 2.6 (Morse 関数の指数) 多様体 M 上の Moser 関数 g の指数はそのヘッセ行列の対角化後の負の固有値の数である.

以下, いくつか Morse の定理を紹介する. 証明は参考文献を参照.

定理 2.1 (Morse1)

 $M をコンパクトな可微分多様体, g: M \to \mathbb{R} を可微分関数とする. ある閉区間 [a,b] に対して, <math>M_a^b = g^{-1}[a,b]$ には特異点がないと仮定する. このとき, $M^a = g^{-1}(-\infty,a]$ と $M^b = g^{-1}(-\infty,b]$ は可微分同相である:

$$M^a \cong M^b$$

定理 2.2 (Morse2)

Mをコンパクトな可微分多様体, $g: M o \mathbb{R}$ を可微分関数とする.

ある閉区間 [a,b]に対して, $M_a^b = g^{-1}[a,b]$ の中に唯一つの特異点 p_0 が存在し, $a < g(p_0) < b$ である と仮定する.

また, p_0 は非退化な特異点であり, その指数をrとする.

このとき, $M^b = g^{-1}(-\infty, b]$ は, $M^a = g^{-1}(-\infty, a]$ にr次元胞体 e^r をある連続写像 $\nu: S^{r-1} \to M^a$ により接着した空間 $M^a \cup_{\nu} e^r$ にホモトピー同値である:

$$M^b \simeq M^b \cup_{\nu} e^r$$

定理 2.3 (Morse 理論の基本定理)

Mをコンパクトな可微分多様体とし, $g: M \to \mathbb{R}$ を Morse 関数とする. gの特異点を p_1, p_2, \dots, p_k とし, gの各点における指数を r_1, r_2, \dots, r_k とするとき, Mは r_1, r_2, \dots, r_k 次元胞体 $e^{r_1}, e^{r_2}, \dots, e^{r_k}$ を持つ有限 CW 複体にホモトピー同値である:

$$M \simeq e^{r_1} \cup e^{r_2} \cup \dots \cup e^{r_k}$$

つまり、Morse 理論によって、link Kr は有限個の胞体の和で書けることがわかるのである.

$$K_r \simeq \bigcup e^i$$

ただし, *i* = 0 or 1

まず, 具体例として多項式を2つ取り上げる. ひとつは $f(x,y) = x^2 + y^2$ であり, もうひとつは $f(x,y) = x^2 + y^3$ である. これらの特異点に付随する link について調べてみよう.

これら2つの多項式の特異点のlinkが,まったく違うものになることを次に説明する.

多項式 $x^2 + y^2$ の零点集合 V について

多項式 $f(x,y) = x^2 + y^2$ について, 特異点を計算する. 特異点とは, f の偏微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y)$ が (0,0) となる点だから, (x,y) = (0,0) が f の唯一の特異点である. また, f(0,0) = 0 となり特異値 は零である.

零点集合 V とは, $V = f^{-1}(0)$ となる \mathbb{C}^2 の部分集合のことであった. $x^2 = -y^2$ であるから, $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x = iy \text{ or } x = -iy\}$ である. 任意の y について, x = iy となるような x が存在す る. V はコンパクトではない.

この単純な多項式 $x^2 + y^2$ の零点集合 V は, $y \in (x \in x)$ どんなに大きく選んでも, 同じ大きさの x が (y が) 定まる. ここで, 複素数 y を大きく選ぶとは, その絶対値を大きく選ぶということである. も

ちろん,この V を何も条件をつけないで図形で表すことは難しい.ただし,他方をきめれば他方は定まるため,V は実2次元であるし,ひとつの変数の図形を定めれば,もう一方の変数の図形が定まる.

特異点に付随する link $K \in V \cap S^3$ としたが, これは $V \in H$, 一方の変数の絶対値を決めると他方の 絶対値が定まる三次元球面 S^3 で切ったものであった.

ここで三次元球面とは, $S^3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x|^2 + |y|^2 = 1\}$ である. S^3 とは, 一方の複素数 xの大きさ |x|を決めると, 他方の複素数 yの大きさ $|y| = \sqrt{1 - |x|^2}$ が決まる実三次元のコンパクトな空間である.



図 13: 多項式 f の零点集合 V と三次元球面の切り口 $K = V \cap S^3$ のイメージ図

三次元空間 *Y_r* と *X_r* の導入

多項式 $f = x^2 + y^2$ の零点集合 V とは、複素変数 y の絶対値を r とすれば、 $y = re^{i\theta}, x = \pm ire^{i\theta}$ となる組であった. x の偏角が y の偏角の ±90 度となる. そして、y が正 (反時計回り) に 1 周す れば、2 つの x たちも正の向き、すなわち、反時計回りに円周を 1 周することがわかる.

この V を切るために,特に S^3 で共通部分をとる必要はなくて,もっと条件の緩い空間と共通部分 をとることができる.たとえば,一方の変数 y の大きさ(絶対値)をrとなるシリンダーで切る.

すなわち, $Y_r = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |y| = r\}$ として, $V \cap Y_r$ というものを考えるのである. あるいは, 同 じことだが, $X_r = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x| = r\}$ として, $V \cap X_r$ というものを考えてもよい.

定義 2.7 (三次元空間 Y_r)

 $Y_r = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |y| = r\}$ と定義する. Y_r とは \mathbb{C}^2 の部分集合で yの絶対値が正数 rとなるものである. 同様に, $X_r = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x| = r\}$ と定義する.

また, $V \cap Y_r$ は多項式の零点集合 V の x を複素平面に射影したものである. これを, $K_r(x)$ と書く.

一方, $V \cap X_r$ は多項式の零点集合 V の y を射影したものである. これを, $K_r(y)$ と書く.

 Y_r 及び X_r について, r を変数と見なして, Y_r の「大きさ」を与える.

定義 2.8 $Y_r(a) = Y_{r=a} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |y| = a, a > 0\}$ ここで,正数 r を実際に定めたもの,たとえば, r = 1 としたものを Yr(1),または, $Y_{r=1}$ と表記する.たとえば, $Y_r(1)$ とは \mathbb{C}^2 内の部分集合で y の絶対値が 1 であるもの全体である. また, $K_r(a)(x) = V \cap Y_r(a)$ とする.

 $K_r(1)(y) = V \cap Y_r(1)$ は、零点集合 V の平面 |y| = 1による切り口である. これは、多項式特異点の結び目の x を複素平面へ射影したものである.

定義 2.9 $X_r(a) = X_{r=a} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x| = a, a > 0\}$ ここで,正数 r を実際に定めたもの,たとえ ば, r = 1 としたものを Xr(1),または, $X_{r=1}$ と表記する.たとえば, $X_r(1)$ とは \mathbb{C}^2 内の部分集合で x の絶対値が 1 であるもの全体である. また, $K_r(a)(y) = V \cap X_r(a)$ とする.

 $K_r(1)(x) = V \cap X_r(1)$ は、零点集合 V の平面 |x| = 1による切り口であり、複素多項式の特異点の結び目の y を複素平面へ射影したものである.

定義 2.10 $\bigcup_{r\geq 0}^{R} Y_r$ とは, 四次元空間 { $(x, y) \in \mathbb{C}^2$; $|y| \leq R$ } を表すものである. また, $\bigcup_{r\geq 0}^{R} X_r$ とは, 四次元空間 { $(x, y) \in \mathbb{C}^2$; $|x| \leq R$ } を表すものである.

 $\bigcup_{r>0}^{R} Y_{r} \cap V$ や $\bigcup_{r>0}^{R} X_{r} \cap V$ は Riemann 面である.

例 2.1 多項式 $x^2 + y^2$ の零点集合 $V = f^{-1}(0)$ を S^3 で切ったものを特異点の *link K* と定義した. *K* と $Kr(1) = V \cap Y_r(1)$ はどこが違うのか. 一方の変数を反時計回りに一周すると, 他方の変数は 円周上に 2つ存在し, 同じ回転速度で一周する.

 $Y_r(1)$ の代わりに S^3 で切れば, $K = V \cap S^3$ において, $|x| = |y| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる.

すなわち,

 $K = K_r(\frac{1}{\sqrt{2}})$

である.

多項式 $x^2 + y^2$ の特異点の *link* K については, $\exists r \ s.t. \ K = K_r$ となることがわかった.

このようにして, 一般には容易には見ることができない四次元空間の部分集合を都合が良くある空間で切ることで図形として可視化できる. このケースでは K は Hopf link と呼ばれる有名な実一次元 多様体である.

 $K_{r=1} = V \cap Y_{r=1}$ を計算し, 変数のどちらかを射影したものを見てみよう. 複素変数 x を射影したものを $K_{r=1}(x)$, y を射影したものを $K_r(y)$ とする.

多項式

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

は、また、2つの既約な多項式の積で表すことができる. $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$ となり、x + iyとx - iyという2つの複素1次式に因数分解できる.

これは,連結成分の個数2に対応している.

$$K_r = V \cap Y_r(1) = V \cap Y_r(1) = \{(iy, y) \in \mathbb{C}^2; |y| = 1\} \cup \{(-iy, y) \in \mathbb{C}^2; |y| = 1\}$$

となる.

コンパクトな実1次元多様体である K_r は, |x| = |y| = 1を満たす \mathbb{C}^2 内の2次元トーラス上にある. $x \ge y$ が複素一次元で関連付けられているということは, 両者の回転スピードが同じということである. 他方が反時計回りに一回転すれば, もう一方は同じ向きに一回転する. yが複素平面上の単位円周の上で一回転すれば, xも同様に単位円周上を一回転する.

この場合, 零点集合 $V = f^{-1}(0)$ を Yr で切ろうが, 半径 $\sqrt{2}$ の 三次元球面 S^3 で切ろうが同じである.

 $V \cap S^3(r = \sqrt{2}) = K = K_r = V \cap Y_r(1)$

 $K \ge K_r$ は、両者ともコンパクトであり、次元も実一次元である. コンパクトであるというのは、二 変数多項式において、一方の変数 y が定まれば x も x の大きさも定まるからである. 一次元であるの は、y(あるいは x)の大きさが予め定められていることに加えて、y(あるいは x)の偏角が決まれば x(あるいは y)は大きさも偏角も決まってしまうからである. $K や K_r$ は、y(あるいは x)の偏角の次元 しかない実 1 次元の多様体である.

Vを三次元球面 S^3 や三次元空間 Y_r などの超平面で切ることで,多項式の特異点に付随する link である Kや Krはコンパクトなものになる.

超平面で切らずに、V をコンパクト化できる手法がある. それは、V を \mathbb{C}^2 内の部分集合と見る代わりに、 $\mathbb{C}P^1$ (あるいは $\mathbb{C}P^2$)の部分集合と見ればよい. 射影空間がコンパクトであるから、その部分集合もコンパクトになる. 射影空間は比の空間だから、複素変数の大きさはもはや意味を持たない. $\mathbb{C}P^1$ ⊃ V = {(*iy*, *y*)} ∪ {(*iy*, *y*)} = {(1,*i*)} ∪ {(1, -*i*)}

であり、Vは $\mathbb{C}P^1$ 内の 2 点となり、その連結成分は 2 つであることが確認できる.

零点集合の逆像 $V = f^{-1}(0)$

KrやKが位相多様体ではない場合を考えてみよう.

例 2.2 ひとつの例として, たとえば, $x^2 + y^2$ を違う超平面で切ってみる.

たとえば, 零点集合 V を次の平面たちで切ると, $K_{r=1}(x)$ は原点で 1 次元の多様体にならない. $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |y-1| = 1\}, \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |y+1| = 1\}, \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |y-i| = 1\}, \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |y+i| = 1\}$





図 15: $|y \pm i| = 1$ で切った $K_r(x)$

図 14: $|y \pm 1| = 1$ で切った $K_r(x)$

これらの平面で切ると, V は特異点 (x, y) = (0, 0) を含んでしまうからである. さて, $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right)$ は (0, 0) のみであり,

Vにおいては, 絶えず df = 0 であるから, 全微分 $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ より, $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ であり, x = 0 では $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$ となり, K(あるいは Kr) は局所座標による表現ができない.

例 2.3 次に,多項式に定数項がある場合を考えてみよう. 定数項を1としても一般性を失わないので、1としてよいので、 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ という多項式を考える.

これの零点集合 $V = f^{-1}(0)$ に関する $K_r = V \cap Y_r$ を見てみよう.



図 16: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ における $K_r(1)$

これも多様体にはならない. このとき, $V = f^{-1}(0)$ は $x = \pm \sqrt{y^2 + 1i}$ となり, ひとつのyの値に対して, x はふたつ対応する. だが, $y = \pm i$ のときだけは, x = 0となって共通の値になってしまう. しかたがって, x = 0のところが K_r は多様体ではない.

一方で, 定数項があっても, その特異値 1 の逆像, $f^{-1}(1) \cap Yr$ を考えると, K_r は滑らかな Hopf link である.

多項式 $f(x,y) = x^2 + y^2$ の零点集合 $V = f^{-1}(0)$ を考えたのは, 定数項がないときであったのは特 異値が特別に零になるからであった. また, 特異点が (0,0) であること, また, それが孤立した特異点 であるために, (0,0) を中心とする超平面で V を切れば, link K は特異点を含まない. だから, 安心し て, link K のトポロジーを調べることができる.

ただし、定数項があるときは、単に、孤立特異点の特異値の逆像を考えればよい. つまり、零点集合 そのものに意味があるのではない. 本質的には特異値の f による引き戻し集合が大事である. 特異値 集合と特異点を中心とする球面との共通部分 (link K)を見ることで特徴的な図形が現れるのである. Milnor fibration 定理の応用範囲が広いのは、V ではなく {df = 0} という集合の特質を利用している といえるだろう.

Hopf link の復習

 $f(x,y) = x^2 + y^2$ の特異点 (0,0) に関する link $K_r = V \in Y_r(1)$ について, その特性を復習する. ここで $Y_r(1) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; |y| = 1\}$ である.

まず, |y| = 1 (= Yr(1))の複素単位円に対して, xは, x = iyかx = -iyであった. そのとき, |x| = 1であった. yを定めれば, それに応じて2つのxが現れるのであるから, 連結成分は2つである. $y = e^{i\theta}$ に対応するのは $x = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$ と $x = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$ という二つが対応する. これらは $x^2 + y^2$

の因数分解である (x + iy) と (x - iy) という既約多項式がそれぞれ対応する零点集合と Yr(1) との 共通部分である.

そして,零点集合 $V \in Y_r$ で切っても三次元球面で切っても同じものが得られた. すなわち, $K_r = K$ であった.

 K_r をトーラス (torus) 上で表現すれば、以下の通りとなる.



図 17: torus上の Hopflink

この図の意味は、横軸を y の偏角で $[0, 2\pi]$ とし、対応する 2 つの x の偏角を縦軸にとる. 2 つの x の 偏角 たちはいつも y から ± 90 度の差を保つ. y が単位円上、複素平面の 1 から反時計回りに一周すれ ば、ひとつの x は複素平面上の i から単位円を反時計回りに回り一周して、再び i に戻ってくる. もう ひとつの x は複素平面上の -i から出発し、反時計回りに回り一周して -i に戻ってくることを示し ている.

組紐群 (the Braid group)

ここで, 組紐群と呼ばれる群を導入する. 組紐群の元は braid と呼ばれている. 本論文で, 組紐群の braid 表示を導入する理由を述べる. ある特定の複素多項式の場合に, 特異点の link のトポロジーが 切る空間によって全く違うものに変遷していく状況において, その link のトポロジーの変化と braid 表示との間に, 秩序立った対応がつくかもしれない, という期待をしているためである. 複素代数曲線 のトポロジーの変化が, 実は秩序立っていて, それは「特異点の指数に対応したある種の braid の合 成や積で書ける」ということになれば, 一定の成果となるのではないかと考えたいからである.

定義 2.11 組紐群

集合 { $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$ } から生成され, 以下の二つの関係式を満たす群を n次の組紐群 (n-braid group) と呼び, Bn で表す. またその元をブレイドと呼ぶ.

 $\begin{cases} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| \ge 2, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n-1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & i, j = 1, 2, \cdots, n-2 \end{cases}$

例 2.4 2本の紐からなる組紐群を B₁ と表す. B₁ の生成元は σ₁ のみである.

例 2.5 braid 表現 $\sigma_i \ge B_1$ の braid σ_1 について

 σ_i は B_{n-1} 組紐群の元であり, i 番目の紐とi+1番目の紐をi番目の紐がi+1番目の紐の下にくるように交差を表す. B_2 を考える. 左右に 2本の紐がある. 具体的には, 2本の紐がテーブル上に平行して並んでいる状態を想像してほしい. 左側と右側に紐が並んでいる状態で, 右側が上にくるように



図 18: 組紐群の braid $\sigma_1 \in B_1$

交差する. その交差行為が braid σ_1 である.

このとき,二つの紐は上で固定されている. 左の紐の下の端を左手に持ち,右の紐の下の端を右手に持ち,右手を上に,左手を下にに,左右の紐の下の端を交差,つまり半回転させる. そして,今度は下の端で左に来た紐はそのまま上の端の左の紐に戻る. 下の右端に来た紐は上の右端に戻ることとする.



図 19: 組紐群の braid $\sigma_i \in B_{n-1}$

例 2.6 逆元 σ₁⁻¹

逆の向きの交差を σ_1^{-1} とする. これは同じく左側と右側に紐が並んでいる状態で左側が上にくるような交差である. (図 20)

 $\sigma_1 \sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-1} \sigma_1 = e$ である. eは交差していない当初の状態である.

組紐群が群であるのは、このように、単位元 e と逆元 σ_i^{-1} が存在し、結合則が明らかに成り立つからである.

例 2.7 $\sigma_1 \in B_2$ は自明な円に対応する. つまり, B_2 において, S^1 と同相となる図形への対応は, σ_1 である.

例 2.8 Hopf link に対応する braid 表現 σ_1^2 Hopf link は二つの円で構成される. B_2 における braid 表示 σ_1^2 は, 同様に, 二つの交わらない紐で構成される. このように, 組紐群と link との間に対応がつく. (図 22)



図 20: 組紐群の braid $\sigma_1^{-1} \in B_1$



 B_2 組紐群の braid σ_1 も σ_1^{-1} も S^1 と同相となる図形に対応する. しかしながら, 向きが互いに逆 にである. これは, S^1 にも反時計回り(正の向き)と時計回りの逆向き(負の向き)があることに対 応している.

複素 2 変数多項式 $f(x,y) = x^2 + y^3$ の特異点とその link

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

について, fの特異点 $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right)$ は (0,0)のみであり、この特異点は孤立している. また、特異値は零である.

 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$ となる x は 0 のみであるが, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = 0$ となるようは y は y = 0 であり, 特異点 は (0,0) である.

さて、この f に対して $K = V \cap S^3 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; x^2 + y^3 = 0, |x|^2 + |y|^2 = 1\}$ より, x, y の大きさ について $|x|^2 + |y|^2 = 1$ かつ $|x|^2 = |y|^3$ となる.この連立方程式を満たす実数解 |x|, |y|はひとつずつ 存在するので、それを $|x| = \xi, |y| = \eta$ とする、但し、 $0 < \xi, \eta < 1$ である、すると K は, $|x| = \xi, |y| = \eta$ を満たす \mathbb{C}^2 内の 2 次元 torus 上にある、次に、x, y の偏角 arg x, arg y について考える. $x^2 + y^3 = 0$ かつ $\xi^2 = \eta^3$ より、arg $y = 2 \arg x/3 + (2k - 1)\pi/3$ ($k \in \mathbb{Z}$)となる、これを先の torus 上 に書くと、link K は (2, 3)-torus knot (trefoil) となる.



図 22: Hopf link に対応する組紐群の braid $\sigma_1^2 \in B_1$

具体的に正の実数 $|y| = \xi \ |x| = \eta \ dx$ めることができる. $x, y \in S^3 \ b \ |x|^2 = 1 - |y|^2 \ c$ ある. $|x|^2 = |y|^3 \ bx$ らなければならない. よって、 $|y| \ d = \chi \ 5 \pi \ 5$

である.

|y|はおよそ 0.754 であり, 同様に |x|は, およそ 0.661 である. ここで, 疑問が生じる. このような 代数計算はトポロジーを考える上で本質的ではない. $V \in S^3$ で切るからであって, もっと都合のよ い切り方をすれば, 避けられるのである.

最初から, $K_r = V \cap Y_r(1)$ を考えれば簡単に, |x| = 1 = |y|となるし, 得られる K と K_r は (ほぼ) 同じものである. $Y_r(1)$ を考える限り, y は 0 ではないから, K_r は特異点を含まず, 1 次元の多様体である.



図 23: torus 上の trefoil

多項式 $x^2 + y^3$ の特異点の結び目, trefoil について

 $f(x,y) = x^2 + y^3$ について, K_r を調べると, これは, 連結成分がひとつであることがわかる. $K_r(1)$ において, xを複素平面に射影すれば, $x = \pm iy^{\frac{3}{2}}$ であるから, xは半径1の単位円である. しかし, $\{x = +iy^{\frac{3}{2}}\} \cup \{x = -iy^{\frac{3}{2}}\}$ は連結成分が1つのものである.

これは, x が y の冪をとっているため, 多価になるため生じる. たとえば, y = 1 のとき, $x = +iy^{\frac{3}{2}} = \pm i$, $x = -iy^{\frac{3}{2}} = \pm i$ であり, どちらの x も 2 つの同じ値 i, -i をもつ. これは, 以下のように解釈される.

 K_r において, y が単位円を1から正の向き(反時計回り)に一周するとき, $x = +iy^{\frac{3}{2}}$ (上の x)の方 は i から単位円を反時計回りに 1.5 周して, -i まで行く. $x = -iy^{\frac{3}{2}}$ (下の x)の方は, -i から単位円を 反時計回りに 1.5 周して i まで行く. つまり, y が反時計回りに y = 1 から出発して 2 周するならば, y の 2 周目は, 上の x が -i から 1.5 周して i まで行くことになり, これは, まさに, 下の x そのもので ある. 同様に, 下の x は y の 2 周目には上の x となる. つまり, 上の x と下の x は連結しており, y が 2 周すれば, x は 3 周するというものになる. torus 上で表記すれば, y の偏角を θ とすれば, x の偏角 は $\frac{3}{2}\theta$ であり, 前掲の図の通り, Hopf link よりも傾きの強い連結成分 1 の 1 次元多様体となる.



図 24: Hopf link

 \boxtimes 25: (2,3)-torus knot

定義 2.12 多項式が可約とは, その多項式が, 一次以上の多項式の積に因数分解できることである. 多項式が既約とは, 可約でないことである.

 $x^2 + y^2$ は(x + iy)(x - iy)であるから、可約であり、一次式に因数分解できる. 一方、 $x^2 + y^3$ は既約である. それを無理に因数分解すれば、冪をとる操作が必要となり、多価となってしまう. 一次式に因数分解できれば、yの偏角とxの偏角は傾き1であり、yが円周を反時計回りに回れば、それと同じ向き、同じスピードでxも回る. しかし、xがyの一次式で表せないときは、yが反時計回りに回れば、xも同様に反時計回りに回るが、回るスピードは有理数倍の差が生じる. 冪をどうとっても、有理数の差のスピードの違いしかないので、yが何回か回るうちに、xは同じ場所に戻ってくる、というわけだ. xが同じ場所に帰ってくれば、連結成分は1つとなる. 2 変数多項式のKで連結成分1のものは、結び目(knot)と呼ばれている. 一方で、多項式が可約のときは、連結成分は1より多い. これらは、リンク(link)、絡み目と呼ばれている.

定義 2.13 $K = S^3 \cap V$ において, その連結成分が1の場合を結び目 (*knot*) と呼ぶ. そうでない場合 を, 絡み目 (*link*) と呼ぶ.

trefoil の組紐群の表示

例 2.9 (2,3)-torus knot (trefoil) の braid 表示

*trefoil*の *braid*表示は, 2 通りある. ひとつは, *B*₂ における, $(\sigma_1 \sigma_2)^2 (= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2)$ である. これは 3 本の組紐で表示できる.

もうひとつは, B_2 における σ_1^3 である. こちらは, 2本の組紐の表示で交差を 3回したものである. σ_1^3 である.



図 26: trefoil に対応する braid 表示 $\sigma_1^3 \in B_1$

trefoil は、2 変数多項式 $f(x, y) = x^2 + y^3$ の knot であったが、y が単位円を2 周すると x は単位円 を3 周するため、x の3 周の方を組紐群の元の表示とみれば、 σ_1^3 であるし、その場合の y の2 周は上 のポジション1から下り、下ではポジション2 までいき、上のポジション2 から下のポジション1 に いき、再び、上のポジション1 に戻るという2 回の下りと上りの繰り返しが y が2 周することに対応 している.

もうひとつの表示は、yの2周の方を組紐群の元の表示とみて、 $\sigma_1\sigma_2$ という元を2度繰り返すこと がyの2回の交差(2周)を表しており、xの方を上のポジション1からポジション2へ下り、ポジ ション2へ上がり、そこから、ポジション3へ下り、そこから、ポジション3へ上がってポジション1 へ下り、再び、ポジション1へ戻るという3回の下りと上りの繰り返しが、xの3周に対応する.



図 27: trefoil に対応する braid 表示 $(\sigma_1 \sigma_2)^2 \in B_2$

 σ_1^3 または $(\sigma_1\sigma_2)^2$ が trefoil の braid 表現であった.

一般に, braid 表示において, $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{m-1})^n$ は $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^m$ とは同値である. (*n*, *m* は 2 以上の自然数)

braid 表現と knot の巻き数

ここで、braid 表示と knot との対応について考える. braid は、紐の上下のポイントを同一視すると、上から下へ降りることが円周一周に相当する. そこで、 組紐群 B_1 の braid e は、自明な knot(回転数 1 の円周) に相当する.

図 28: 回転数1の1重の自明な結び目 に対応する braid 表示 e

また、braid σ_1 は、上から1番の紐が途中でクロスして、下の2番に行く、それは、上の2番と同一 視できる、そして、上の2番はクロスして下の1番に行く、こうして、 σ_1 は2重の結び目 (回転数2) と 対応させることができる.



図 29: 回転数 2 の 2 重結び目に対応する braid 表示 σ_1

同様に, $\sigma_1 \sigma_2 \in B_2$ は 3 重の結び目(回転数 3)と対応させることができる.

同様に, $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_2$ は 4 重の結び目(回転数 4)と対応させることができる.

同様に、 braid $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ は n 重の結び目 (回転数 n) と対応させることができる.

表 1:	1: braid 表示と[回転数の対応
4	0	0

回転数	1	2	3		n
braid 表示	e	σ_1	$\sigma_1 \sigma_2$	•••	$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$
対応する結び目	1 重結び目	2 重結び目	3 重結び目		n 重結び目



図 30:3 重結び目に対応する braid 表示 $\sigma_1 \sigma_2$



図 31: 4 重結び目に対応する braid 表示 $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \in B_3$

多項式 $x^p + y^m$ の多項式の特異点の結び目(絡み目)の braid 表示

多項式の零点集合 $x^p = -y^m$ の x^p の射影 $K_r(x^p)$ は m 重の結び目に対応する. その braid 表示は, $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1}$ である. また, $K_r(x)$ は $K_r(x^p)$ を $\frac{1}{p}$ 乗したものだから, 回転速度が $\frac{1}{p}$ となる が, 成分は p 個に増える. $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1})^p$ が, 多項式 $x^p + y^m$ の特異点の link の braid 表示となる. $\sigma_1\cdots\sigma_{m-1}$ を p 乗することは, 成分が p 個に分かれつつ, 同時に, 紐の上から下までが一周に対応す るため, p 倍の回転の速度が $\frac{1}{p}$ へ減速することを意味している.

いままで見てきた $x^2 + y^2$ の特異点の絡み目のブレード表示が σ_1^2 となることや $x^2 + y^3$ の特異点 それが $(\sigma_1\sigma_2)^2$ になることは、よく知られた事実である. もちろん、 $x \ge y$ とを取り替えた $x^3 + y^2$ の特異点の結び目は σ_1^3 と表示できる.

補題 2.1 複素二変数多項式 $x^p + y^m$ の特異点の結び目(絡み目)は, braidでは, $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{m-1})^p$ と表示できる.

複素 2 変数多項式 $f(x,y) = x^2 + y^3 + \varepsilon y^2$ ($\varepsilon > 0$) について 複素 2 変数多項式 $f_{\varepsilon}(x,y) = x^2 + y^3 + \varepsilon y^2$ ($\varepsilon > 0$) の link K について調べたい. この複素多項式は, 前述の 2 つの多項式 $x^2 + y^2$ と $x^2 + y^3$ とを合わせた複合型である.

 $f(x,y) = x^2 + \varepsilon y^2 + y^3$ の特異点は, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$ となる $x \ge \frac{\partial f}{\partial y} = 2\varepsilon y + 3y^2 = 0$ となる $y \ge c$ なる $x \ge \frac{\partial f}{\partial y} = 2\varepsilon y + 3y^2 = 0$ となる $y \ge c$ なる $x \ge \frac{\partial f}{\partial y} = 2\varepsilon y + 3y^2 = 0$ となる $y \ge c$ なる $x \ge \frac{\partial f}{\partial y} = 2\varepsilon y + 3y^2 = 0$ となる $y \ge c$ なる $x \ge \frac{\partial f}{\partial y} = 2\varepsilon y + 3y^2 = 0$ となる $y \ge c$ なる $x \ge \frac{\partial f}{\partial y} = 2\varepsilon y + 3y^2 = 0$ となる $y \ge c$ なる $x \ge \frac{\partial f}{\partial y} = 2\varepsilon y + 3y^2 = 0$

また, 特異値も 2 つある. それらは, 零と $\frac{4\epsilon^3}{27}$ である.

 $f(x,y) = x^{2} + \varepsilon y^{2} + y^{3} = x^{2} + y^{2}(\varepsilon + y)$

であるから, $\check{y} = y(\varepsilon + y)^{\frac{1}{2}}$ と置くと絶対値 |y| が ε に比して十分小さいとき, 多項式は $f(x,y) = x^2 + \check{y}^2$ となる. その link K は x と \check{y} の Hopf link である.

|y|が ε と比して十分小さいとき、つまり、|y|が零に十分近いとき、 $|\varepsilon y^2|$ は $|y^3|$ よりも大きくなるから、 $\varepsilon y^2(\varepsilon > 0)$ の項の特徴が勝る.

たとえば, $\varepsilon = 1$ とすれば, $\tilde{y} = y(\varepsilon + y)^{\frac{1}{2}} = y(1 + y)^{\frac{1}{2}}$ と置くと絶対値 |y| が零に十分近いとき, $\lim_{|y|\to 0} (1+y)^{\frac{1}{2}} = 1$ であり, その場合, $f = x^2 + y^2$ であるから, K は $x \ge y$ の Hopf link と見ることができる.

また, $f(x,y) = x^2 + \varepsilon y^2 + y^3 = x^2 + y^3 \left(1 + \frac{\varepsilon}{y}\right)$ であるから, $\hat{y} = y(1 + \frac{\varepsilon}{y})^{\frac{1}{3}}$ と置くと |y| が ε に対して十分大きいとき, $1 + \frac{\varepsilon}{y}$ はおよそ 1 となるから, 多項式 $f = x^2 + \hat{y}^3$ は $x^2 + y^3$ と見える. その link K は trefoil であった.

 ε が |y| に比べて十分に小さいときの K は $f = x^2 + y^3$ の特異点に付随する link である trefoil の 特性を備えると予想される.

一方, ε が |y| に比して十分に大きいときの K は $x^2 + y^2$ の特異点に付随する link である Hopf link の特性を持つと想定される.

この論文の問題意識のひとつは、 ε の大きさが変わると、ハイブリッド型の多項式 $x^2 + \varepsilon y^2 + y^3$ の K はどのように変化していくのだろうか、ということにある. つまり、Hopf link は連結成分 2 であ り、trefoil はそれが1 であり、両者の特徴は全く違う. その全く違う者同士がどのような変遷をたどる のかという問題を整理したいのである.

しかし、ここで、物事を複雑にしているのは、|y|の大きさと ε の大きさとの相対性にある. 先ほど示したように、Hopf link に近いか、trefoil に近いかは、|y|の大きさだけによらない. ε の大きさにもよるのである. 実際、 $limit_{\varepsilon \to 0}f = x^2 + y^3$ の K は trefoil であるが、 $\varepsilon > 0$ が |y|より十分に大きなものであれば、そして、|y|が零に十分に近ければ、どんなに小さい ε ととっても、その多項式の特異点に付随する link K は Hopf link に近いものになるであろう. \mathbb{C}^2 は距離空間であり、ハウスドルフであるから、どんなに小さな $\varepsilon > 0$ に対しても、それより小さい球面 (=零に近い |y|)が存在する. その球面で零点集合をとれば、それは Hopf link であろう.

この |y| と ε の大きさの相対性によって, 多項式 $f = x^2 + \varepsilon y^2 + y^3$ の特異点に付随する link を捉え ることを困難にしている. また, これまでの多項式 $x^2 + y^3$ や $x^2 + y^3$ は項が 2 しかなく, しかも, 変 数が分離されているために, それらの特異点の link は際立った特徴を有したのであった. つまり, |y| を決めれば, それは同時に |x| が唯一の値に決まるということであった. |y| を抑えれば, |x| が決まる のであるから, なにも零点集合 V と三次元球面との共通部分を考えるまでもなく, もっと簡単に Y_r というものを考えれば, $K = K_r$ となってくれたのであった.

しかしながら, これまでに見た Hopf link と trefoil において際立っていたこの特徴 ($K = K_r$) は一般的ではない. たとえば, 今回のように多項式の項をひとつ増やしただけで, |y| を決めても |x| はひとつには定まらない. y の偏角ごとに |x| は動くからである.

一方で、2変数多項式の零点集合 V は、一般的には、|y|が大きくなれば、|x|も大きく成らざるを得ない. このよい性質を使い難くしているのが、 ε の存在である.

V の切り方の工夫

新しい多項式 $f = x^2 + \epsilon y^2 + y^3$ の特異点の link を調べるやり方は主に 2 つある.

ひとつは、三次元球面 S^3 の大きさを固定するやり方である. S^3 の半径を1に決めておいて、 ε の大きさを十分大きなところから小さくしていくのである. そして、link $K = V \cap S^3$ は計算によって具体的に求めることができる. しかし、これは計算量が多くなる.

もうひとつは, ε を固定して球面の大きさを変えていくやり方である. |y| と ε の相対性を逆手にとるこのやり方には, さらに工夫されたやり方がある. それは球面 S^3 の代わりに三次元空間 Y_r を代用するのである. そのようにしても得られる K_r はコンパクトなものになる. 二変数の多項式の零点集合の性質により, 一方の大きさを決めれば, 他方の大きさが, ほぼ定まってしまうからである. こちらのやり方では, link の変遷は視覚的に非常にわかりやすく捉えることができる. 零点集合を都合のよい曲面で切るのが都合のよいやり方であろう. このやり方は, しかし, $K \ge K_r$ が同相であることを示す必要はある. 一定の球面で ε を小さくしていけば, 球上の多項式の零点集合は, 当初, ε が大きいから, 多項式では $x^2 + \varepsilon y^2 + y^3$ で y^2 の項が勝って, link は Hopf link になる. だが, ε が零に近ければ近いほど, 今度は y^3 の項が勝って, link は trefoil になる. 同様に, 多項式 $x^2 + y^2 + y^3$ を考えて, 球面を大きくしていけば, y^3 の影響が勝るため, trefoil になる. このように, ε を大きくとって小さくしていくことと球面を小なものから大きなものへしていくかには大きな違いはない.

射影 $K_r = V \cap Y_r$ と link $K = V \cap S^3$

与えられた 2 複素変数多項式 $x^2 + \varepsilon y^2 + y^3$ について、3 次元球面 S^3 の半径を r と置く. また、y の 絶対値 |y| を r と固定した 3 次元空間 Y_r と V との共通部分である $K_r = V \cap Y_r$ と $K = V \cap S^3$ との 比較を述べる.

まず, $K_r = V \cap Y_r$ と $K = V \cap S^3$ との類似点を述べる. 両者はどちらもコンパクトである.

まず, K_r については, $x^2 = -\varepsilon y^2 - y^3$ であるから, Y_r の定義から |y| = r である. また, 零点集合 であることから, $x \ge y$ との大きさの関係が定まり, $|x^2|$ は最大値 $\varepsilon r^2 + r^3$ を持つ. さらに, $|x^2|$ は最 小値 $|\varepsilon r^2 - r^3|$ を持つ. $|x^2|$ が最小値と最大値とを持てば, |x| も最大値と最小値を持つ. K_r はコンパ クトである. そして, $K = V \cap S^3$ については. S^3 がコンパクトだから K はコンパクトである.

また, f の二つあるうちのひとつの孤立特異点 (x, y) = (0, 0) について, K_r も K もそれを含まな いように作られている.

問題は、もうひとつの特異点 $(x,y) = (0, -\frac{2\varepsilon}{3})$ だ.

その特異点については, K_r においては, $r = |y| = \frac{2\epsilon}{3}$ となる K_r のところのみが, その孤立した特異点を含む. このことは重要である. それゆえ,

 $r \neq \frac{2\epsilon}{3}$ のときは, Y_r で切った K_r はその孤立特異点を含まないことが明瞭なのである. このことは 特異点を扱う上で都合がよい.

 $K_r = V \cap Y_r$ を考える利点 2 つある. 一つ目は, 特異点のところだけ, つまり, K_r に存在する特異点の近傍だけを注視すれば, 何が生じるかは一目瞭然となることにある.

 K_r で物事を考える2つ目の利点は, $\varepsilon = 1$ と固定すればよいことにある. 三次元空間 Y_r を用意して, r = |y|を十分小さいところから始めて連続的に大きくしていけばよい.

 $K_r = V \cap Y_r$ は図形としての link や knot が簡単に可視化できる. また, 回転の向きや $x \ge y \ge v$ う複素変数間の点の対応もすぐにわかる. 特異点の扱いについても, Y_r を使えば, 容易になる. 計算も 簡単である.

一方, $K = V \cap S^3$ を考えるときは, どうだろう. 三次元球面を用いると, |y|を大きくすれば, |x|は 球面であるから小さくなっていく. ところが, 零点集合の特性で |y|が大きくなると |x|は大きくなる のであり, 果たしてそのような |x|が存在するのかを確認する必要が出てくる.

実際, $K = V \cap S^3$ においては, 物事はそれほど単純ではない. S^3 の半径を1とする. 特異点 $(0, -\frac{2\epsilon}{3})$ を含む (x, y)の組を考える. $y = -\frac{2\epsilon}{3}$ として, $|x|^2 + |y|^2 = 1$ かつ $|x^2| = |\epsilon y^2 + y^3|$ となるような点が存在するかどうかを, ϵ ごとに, 確認する必要がある. このことは ϵ を変数とみれば, 3 変数 3 次方程式と2 次方程式とを連立方程式で解くという代数計算を要する.

Vのy-平面への射影 $K_r(y)$

多項式 $f(x,y) = x^2 + y^2 + y^3(\varepsilon = 1)$ の超平面 V において、u = 1 + y とおけば $x = \pm iyu^{\frac{1}{2}}$ なの で $|x|^2 = x\overline{x} = y\overline{y}u^{\frac{1}{2}}\overline{u}^{\frac{1}{2}} = |y|^2\{(1+y)(1+\overline{y})\}^{\frac{1}{2}} = |y|^2\sqrt{|y|^2 + 2|y|\cos\psi + 1}$ となる.ただし、 ψ は y の偏角である.

$$\begin{split} |x|^2 &= |y|^2 \sqrt{|y|^2 + 2|y|\cos\psi + 1} \ \texttt{において}, \ |y| = r \ \texttt{k}\texttt{k}\texttt{\zeta}\texttt{k}, \\ |x|^2 &= r^2 \sqrt{r^2 + 2r\cos\psi + 1} \ \texttt{C}\texttt{b}\texttt{S}. \end{split}$$

Morse 関数 $g: V \to \mathbb{R}$ について, $g(r, \psi) = (r^6 + 2r^5 \cos \psi + r^4)^{\frac{1}{4}}$ であり, $y = re^{i\psi}$ である. g は $|x| \in y$ に関する変数で表した実関数である.

多項式 $x^2 + y^2 + y^3$ の零点集合 V を三次元空間に可視化するとき, y の極座標上に, $|x|^2$ を高さ方向に描いた立体図が以下である.



図 32: Riemann 面としての V の様子. $q(r, \psi) = (r^6 + 2r^5 \cos \psi + r^4)^{\frac{1}{4}}$ の逆像

Morse 関数 *g* の Morse 特異点 $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ を調べることで, 図計の特徴を記述することができる. ここでは, *g* の特異点が複素数 *y* の極座標上の点 $y = -\frac{2}{3}$ となる *V* の点にあること, そして, この点における Morse 指数は 1 であることがわかる.

実際, $V = g^{-1}(-\infty, \infty)$ は, $|x|^2$ の大きさを変えていった場合の Vの yへの射影である. 実際, 多項式 $x^2 + y^2 + y^3$ の零点集合というものを |x|の大きさで切ったもの $X_r \cap V$ を複素平面上に図示すると以下のようになる.

 $y^{3} + y^{2} + x^{2} = 0$ を三次方程式の解の公式を使って y について解けば, |x|の大きさごとに, 零点集

合*V*の*y*を複素平面に射影したものが得られる. つまり, *V*の Riemann 面であり, \bigcup *V*∩*X_r* である.

実際に, $y^3 + y^2 + x^2 = 0$ を x を定数として扱い, y についてこの 3 次方程式を解いたものが以下 の図である. V の Riemann 面であり, $\bigcup V \cap X_r$ を「真上」から見た断面図である. |x|が小さいとき, y もまた小さい. y を赤, 黄, 青としたのは, y の 3 つの解をそれぞれ色別に分けた ものである. x が正の方向に回るとき, 多項式の性質である正則性により y も正の方向に回る. |x|が小さいとき, y を複素平面へ射影したものは (0,0) と (-1,0) を正の向きに二周する円である.



 $g \mathcal{O}$ Morse 特異点 $(r, \psi) = (\frac{2}{3}, \pi) \mathcal{O}$ とき, $|x^2| = |-y^2 - y^3| = \frac{4}{27}$ であり, そのとき, $|x| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ である. $y \mathcal{O}$ 射影は $|x| > \frac{2\sqrt{3}}{9}$ のとき, 連結成分はひとつとなる.



射影の正則性

 $K_r = V \cap X_r$ という yの射影図を見てきた. 多項式は正則であり, その yへの射影も正則なため, x が正に回れば y も正に回る. このとき, 左手側が内側と見なせる. 内側に影をつけて, 特異点における 様相をもう少し詳しく見ていく.

|x|が小さいとき, $V o y \sim 0$ 射影は, 点 $(0,0) \geq (-1,0)$ を中心に回る二つの円であったが, 点 $(0,-\frac{2}{3})$ を挟んで正の向きに回転している. 図は, 右側の円と左側の円の円周の一部が書かれており, 影がついているところは, Riemann 面 V の内側である.





例 2.10 $|x| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ においては, $V o y \land o$ 射影には $y = -\frac{2}{3}$ となる点が含まれる. そこで, 交差が生じる.



図 40: 交差時の V の内部の様子

クロッシングが生じた後, つまり, $|x| > \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき, 二つあった円はひとつになる. 回り方は正の方向である. このとき, *Riemann* 面 V の内側に影をつけたのものが下図である. *Morse* 関数 g の *Morse* 指数 1 の *Morse* 特異点 $(0, -\frac{2}{3})$ の周りにおいて影の様子を見ると, 交差前は, 特異点の外側にあった影 (V の内部)は, 交差後には内側となっていることが重要なポイントである.

つまり, 零点以外に Morse 特異点がある場合には, $X_r や Y_r や S^3$ の大きさが小さいとき, 零点以外の孤立特異点は含まない. Morse 理論によれば, 切る超平面を大きくしていくと, あるところで, 零点ではない孤立特異点を含むようになる. 球面の径が小さいとき, 特異点の数は少ないが, 径が大きくなるにつれて, 特異点の数は多くなっていく. この逆にはならないのである. 物事は, 簡単にはならず, どんどん複雑になるということが Morse 理論からわかるのだ.

交差は, *Morse* 特異点で生じること, *Morse* 指数によって, その様子が把握できる. 今回のケース では, *Morse* 指数1であり, これは, 特異点 $(0, -\frac{2}{3}) \in \mathbb{C}^2$ は鞍点であることを示している.



図 41: 交差後の V の内部の様子



図 42: 交差前から交差後へ. 色付きの部分の面積 (V の内部) は大きくなっていく一方

S^3 の半径と Y_r の半径との対応

特異点の link を考えるとき, 三次元球面 S³ の半径を大きくしていくやり方を, Y_r を大きくしていく やり方に代えてよい. 理由は以下による.

$$S^3$$
の半径を r とすれば、 $r^2 = |x|^2 + |y|^2$ より, $r^2 = |y|^2 \sqrt{|y|^2 + 2|y|\cos\psi + 1} + |y|^2$

ここで, $\rho_{\psi}(=r^2) = |y|^2(1+|y|^2\sqrt{|y|^2+2|y|\cos\psi+1})$ と置く.

 $|y|^2 + 2|y|\cos\psi + 1 \ge 0$ である. $\psi = \pi$ のとき, $\cos\psi = -1$ で, $|y|^2 + 2|y|\cos\psi + 1$ は非負の最小値をとる. そのとき, $|y|^2 + 2|y|\cos\psi + 1 = |y|^2 - 2|y| + 1 = (|y| - 1)^2 \ge 0$ である.

また, $\psi = 0(or2\pi)$ のとき, $\cos 0 = 1$ で, $|y|^2 + 2|y|\cos \psi + 1$ は最大値 $|y|^2 + 2|y| + 1 = (|y| + 1)^2 > 0$ をとる.

つまり,

$$|y|^{2}\left\{1+|y|^{2}\sqrt{(|y|-1)^{2}}\right\} \leq |\rho_{\psi}| \leq |y|^{2}\left\{1+|y|^{2}(|y|+1)\right\}$$

 $\rho_{\psi}(=r^2) = |y|^2(1+|y|^2\sqrt{|y|^2+2|y|\cos\psi+1})$ を|y|で微分すれば、任意の ψ において、

$$\frac{d\rho_{\psi}}{d|y|} = 2|y|(1+|y|^2\sqrt{|y|^2+2|y|\cos\psi+1}) + |y|^2(2|y|\sqrt{|y|^2+2|y|\cos\psi+1} + |y|^2\frac{|y|+\cos\psi}{\sqrt{|y|^2+2|y|\cos\psi+1}})$$

である.

 $\frac{d\rho_{\psi}}{d|y|}>0$ であれば, Vを乗せる S^3 の半径 rの二乗と Y_r の大きさ|y|が狭義単調増加であることが確認できる.

 $\cos \psi = -1$ のときに, $\frac{d\rho_{\psi}}{d|y|}$ の微分の値は最小になるので, $\cos \psi = -1$ のときに, $\frac{d\rho_{\psi}}{d|y|} > 0$ を確認できれば, $r^2 \ge |y| \ge 0$ 単調性が確認できる.

 $\frac{d\rho_{\psi=\pi}}{d|y|} > 0$

を仮定して,同値変形を施す.

$$\begin{split} & \frac{d\rho_{\psi=\pi}}{d|y|} > 0 \\ & 2|y| + 2|y|^3(|y|-1) + 2|y|^3(|y|-1) + |y|^4 \frac{|y|-1}{|y|-1} > 0 \\ & 2|y| + 4|y|^3(|y|-1) + |y|^4 > 0 \\ & 5|y|^3 - 4|y|^2 + 2 > 0 \end{split}$$

|y| > 1のとき,不等式 $5|y|^3 - 4|y|^2 + 2 > 0$ が成り立つのは明らか. |y| < 1のときも, $5|y|^3 - 4|y|^2$ は -1よりも小さくなることはないので,この不等式はこのときも成り立つ. また, |y| = 1のときも, 5 - 4 + 2 = 3 > 0であるから,この不等式は成り立つ.

 $\frac{d\rho_{\psi}}{d|u|} > 0 \ \varepsilon \ z \ \mathcal{Z}.$

よって, 任意の $\psi(y \circ n = 0)$ について, ψ を固定すれば, $y \circ n = 0$ 約対値 |y| に対して, ρ_{ψ} は狭義単調増加である.

つまり, 任意の y の偏角 ψ に対して, それを固定すれば, $K_r = V \cap Y_r$ の r = |y| と $K = V \cap S^3$ の S^3 半径とは 1 : 1 で対応する.

|y|の大きさを K_r の大きさとし, S^3 の半径を Kの大きさとするならば, 両者は, yの偏角 ψ ごとに, 1:1 に, 連続的に対応する.

また, $\frac{dr^2}{dr} = 2r > 0(r > 0)$ であるから, S^3 の半径 $r \ge r^2$ は狭義単調増加であり, K の大きさ $r \ge K_r$ の大きさ |y| が狭義単調増加となる.



図 43: Kにおける S^3 の半径(縦軸)と K_r における $Y_r = |y|$ との関係(横軸). た だし, yの偏角 $\psi = 0$



図 44: yの偏角 $\psi = \pi$ のとき

上の左側の図は, y の偏角が 0(または 2π)のときの Kの大きさと K_r の大きさとの対応を示した ものである.上の右側の図は, y の偏角が π のときの両者の対応を示したものである.0 < |y| < 2の 範囲では,偏角による K_r の大きさの歪みはせいぜい 2 倍程度の違いしかない.

楕円 (K_r) で切ろうが円 (S^3) で切ろうが, link の変化の様子を把握できればよい. 調べる |y| = rの 大きさの範囲もしれている. ぜいぜい, 0 < |y| < 2 ぐらいまでを調べれば十分だ. もうひとつの孤立 特異点 $(0, -\frac{2}{3})$ が存在する $|y| = \frac{2}{3}$ と Hopf link が trefoil になる瞬間である |y| = 1 で特別なことが 起こるのであって, それ以外のところでは何も特別なことは生じないからである.

繰り返すが、3 次元球面の半径 r を大きくしていくことと、y の偏角 ψ 毎に y の絶対値 |y| を大きくしていくことは、同じことと見なせる.

三次元球面 S^3 の半径 rを大きくしていくことを, Y_r における |y| = rを大きくしていくことは同じであるので,

 $K = V \cap S^3$ ではなくて, $K_r = V \cap Y_r$ を調べるという方針をとりたい.

K_rとKとの間に連続な全単射写像が存在するので両者は同相である.

多項式 $f = x^2 + y^2 + y^3$ の特異点の link $K_r = V \cap Y_r$ を調べる際の留意点が二つある. 一つ目は, |y| を零に近いところから始めて徐々に大きくしていき, もうひとつの特異点に関係する $|y| = \frac{2}{3}$ となるときに注意が必要ということ.

もうひとつは, 連結成分が 2 から 1 となる |y| = 1 のときに, link を注意深く調べる必要があること. r = |y| = 1 のとき, 特に y = -1 のとき, $x^2 = 0$ となること. つまり, この多項式 f は y = -1 のときに, $x = \pm 0$ となるため, それまで 2 つであった連結成分が一つとなる劇的な変化が起こる.

そして, その後は, |y| >1のところでは, 特段の留意点はない. 単に, Yr を大きくしていけばよい.

つまり, Hopf link と trefoil との境目は連結成分の個数の変化から, y = -1の点で生じるのである から, Y_r については, |y| = r は零に近い, 1 よりも随分と小さい r から始めて, r < 1を満たすよう な数で1 に近いものを考えるのが第一段階. ここで, $K_r(x)$ は, Hopf link(連結成分 2) である. |y| = 1のときの評価を第二段階とし, 何か特別なことが生じる状態とする. 最後に, |y| > 1のときを第三段 階とすればよい. ここでの link $K_r(x)$ は, trefoil 状態 (連結成分 2) である.

ただし、留意点として述べたように、第1段階 $(K_r(x) \text{ or Hopf link})$ では、 $|y| = r = \frac{2}{3}$ となる $Y_r(\frac{2}{3})$ において、V の原点 (0,0) 以外では唯一の f の孤立特異点 $(x,y) = (0,-\frac{2}{3})$ が存在することに注意する. $r = \frac{2}{3}$ のときの、x の複素平面への射影 $K_r(x)$ には際立つ特徴があるからだ.

(V上の Morse 関数の特異点ではない. x-平面への射影における xの branch points となる点である.

 $f(x,y) = x^2 + y^2 + y^3$ の特異点 link の射影

多項式 $x^2 + y^2 + y^3$ のひとつの特異点 (0,0) について, Y_r を準備する. $y \neq 0$ である. Y_r は y を複素平面に射影すれば単に自明な円に過ぎない. よって, link を調べる対象は, もう一つの 変数 x であり, x の複素平面への射影である. link $K_r = V \cap Y_r$ の x の複素平面への射影を $K_r(x)$ と 表記する.

多項式の零点集合 V において, $x^2 = -y^2 - y^3$ であるから, link の中の x の射影 $K_r(x)$ を見る前 に, x^2 の射影 $K_r(x^2)$ の様相を調べる.





図 45: $K_r(x^2)$. Y_r の大きさ $|y| = \frac{1}{27}$

図 46: $K_r(x^2)$. Y_r の大きさ $|y| = \frac{3}{27}$

ここで, Y_r の大きさ $|y| = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$ のときの $K_r(x^2)$ について, 解説する. $x^2 = -y^2 + y^2$ なので, yの偏角が0のとき, つまり, $y = \frac{1}{9}$ のとき, $x^2 = -(\frac{1}{9})^2 - (\frac{1}{9})^3 = -\frac{1}{81} - \frac{1}{729} = -\frac{4}{729}$ である. $|y| = \frac{1}{9}$ で yの偏角が0から π まで反時計回りに半周すると, x^2 は正に一周するが, や や縮む. $y = -(\frac{1}{9})^2 - (\frac{1}{9})^3 = -\frac{2}{729}$ で $\frac{2}{729}$ の分の差だけ縮む.

yの偏角がさらに π から $2\pi = 0$ まで正に半周すると, x^2 は反時計回りに一周するが, 同様の理由 から $\frac{2}{729}$ だけ伸びる.

つまり, Y_r における y が反時計回りに1周すると, x^2 は歪んだ円を2周する. Y_r を大きくしていく.

以下は, 左図が, $|y| = \frac{1}{3}$ のときの $K_r(x^2)$. そして, 右図は, それより少し大きな $|y| = \frac{4}{9}$ のときの $K_r(x^2)$ の射影図である. $K_r(x^2)$ は Y_r が大きくなるにつれて, 大きくなっていく. そして, 2 周する歪んだ円である.





図 47: $K_r(x^2)$. $|y| = \frac{1}{9}$. yの偏角は 0 から π

図 48: $K_r(x^2)$. $|y| = \frac{1}{9}$. y の偏角は π から 2π



以下,右図が重要である.

 Y_r が $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点 $y = -\frac{2}{3}$ を含んでる場合である. つまり, $|y| = \frac{2}{3}$ のときの図である. この図では, $K_r(x^2)$ は $x^2 = -\frac{4}{27}$ 多様体ではないことが確認できる. x^2 の複素平面上の点 $(-\frac{4}{27}, 0)$ において尖点が確認できる. 多項式 $f = x^2 + y^2 + y^3$ の零点集合では, その全微分 $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$ であるため, $y = -\frac{2}{3}$ において, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる.

いま, x^2 を見ているので, $\frac{\partial f}{\partial x^2} = 1$ となる. そのような条件で df = 0を満たすための x^2 のベクトル はゼロベクトルしか存在しない.

よって, $K_r(x^2)$ においては, 尖点 $\left(-(-\frac{2}{3})^2 - (-\frac{2}{3})^3, 0\right) = \left(-\frac{4}{27}, 0\right)$ が存在する.



 \boxtimes 51: $K_r(x^2)$. $|y| = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$



図 52: $K_r(x^2)$. $|y| = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$. $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる $y = -\frac{2}{3}$ を含む

引き続き Y_r を大きくしていく.

以下, 左は, $|y| = \frac{21}{27} = \frac{7}{9} < 1$ のときの $K_r(x^2)$.

右は, 同様だが, $|y| = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$ の場合である. $K_r(x^2)$ は三重巻きになっている. しかしながら, 中央の小さな円は, 原点 (0,0)の左側に存在しているため, 回転数としては, 2 のままである.



さて, いよいよ問題の |y| = 1 の場合である. 左図である.

y = -1のとき, $x^2 = -y^2 - y^3 = -1 - (-1) = 0$ であり, $K_r(x^2)$ は複素平面における原点 (0,0) を含む.

このとき, x² は原点の周りを何周したかは, わからない. 回転数を定義できない.

ところが、右図では、 $|y| = \frac{28}{27} > 1$ であるから、 $y = -\frac{28}{27}$ のとき、

3 乗の項がはじめて 2 乗の項より絶対値で大きくなる. $x^2 = -y^2 - y^3 = -(-\frac{28}{27})^2 - (-\frac{28}{27})^3 > 0$ であるから, $K_r(x^2)$ は明らかに原点を 3 回転している.

回転数でみれば、不連続な2回から3回への変化が生じるのが、|y|=1のところであることがわかる.





図 55: $K_r(x^2)$. $|y| = \frac{27}{27} = 1$. このとき $x^2 = 0$. 原点を含むため回転数が定義で きない.

図 56: $K_r(x^2)$. $|y| = \frac{28}{27}$. 回転数は 3.

あとは, 同じである.

以下は, $|y| = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}$ (左) と $|y| = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$ (右) のときの $K_r(x^2)$ である. K_r は随分と大きくなっている. そして, 中央の円が大きくなってきた.



 $|\mathbb{X}|$ 57: $K_r(x^2)$. $|y| = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}$



 \boxtimes 58: $K_r(x^2)$. $|y| = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$



 \boxtimes 59: $\bigcup K_r(x^2)$

射影 $K_r(x^2)$ の連結性と $K_r(x)$ の回転数の定義

多項式 $x^2 + y^2 + y^3$ の特異点の link K の x^2 の射影 $K_r(x^2)$ を前章で図示した. 図示された射影 $K_r(x^2)$ は 1 次元であり, かつ, 連結であった.

補題 2.2 複素多項式 $x^2 + y^2 + y^3$ の特異点の *link* の射影 $K_r(x^2)$ は連結である.

この補題の証明のため、二つの連続写像を用意する.

 $s:S^1 \ni e^{i\theta} \to -e^{i2\theta} - re^{i3\theta} \in \mathbb{C}$

 $s \in S^1$ から \mathbb{C} への連続写像とする.ただし, rは正の実数とする.

 $t:\mathbb{C}\ni a\to r^2a\in\mathbb{C}$

tを複素数aを実数倍 r^2 する連続写像とする.

連続写像と連続写像の合成は連続写像であるため、 $t \circ s$ は連続である. また、 S^1 は連結である. 連続写像で連結性は保持されるから、像 $t \circ s(S^1) \in \mathbb{C}$ も連結である. $t \circ s(\theta) = -2r^2 e^{i2\theta} - r^3 e^{i3\theta} = x^2$ であるから、 $t \circ s(S^1) = K_r(x^2)$. よって、 $K_r(x^2)$ は連結.

補題 2.3 複素多項式 $x^2 + y^2 + y^3$ の特異点の *link* の射影 $K_r(x^2)$ は連結な閉曲線である.

 $K_r(x^2)$ の次元は一次元であり,連結. さらに,零点集合 $x^2 = -y^2 - y^3$ において, $-y^2 - y^3 = -2r^2 e^{i2\theta} - r^3 e^{i3\theta}$ であり, $\theta = 0$ の点と $\theta = 2\pi$ の点が一致するので $K_r(x^2)$ は閉曲線である.

定義 2.14 (結び目)

一次元の閉曲線で連結成分がひとつなものを結び目 (knot) という.

定義 2.15 (絡み目)

複数の連結成分からなる一次元の閉曲線たちを絡み目 (link) という.

また、写像 *s* について、正の実数 *r* が十分に小さいとき、 $s(\theta) = -e^{i2\theta} - re^{i3\theta}$ は $-e^{i2\theta}$ と見なせる. そのとき、複素数 *y* の偏角を θ とし、その絶対値を *r* と見なすと、*y* が順方向に一周すれば、*s* の像は 2 周する. 写像 *t* はスカラー倍するだけの写像だから、回転数に影響を与えない. よって、 $t \circ s$ も 2 周する.

一方,写像*s*について,正の実数*r*が十分に大きければ,*s*を*r*で割ったもの, $\frac{s(\theta)}{r} = -\frac{1}{r}e^{i2\theta} - e^{3\theta}$ は $-e^{i3\theta}$ と見なせる.同様に, $t \circ s$ の像は*y*が順方向に一周すれば, 3 周する.

以下は,本論文のみで用いる定義である.

定義 2.16 複素多項式 $x^2 + y^2 + y^3$ の特異点の *link* の射影 $K_r(x^2)$ の回転数とは, y を順方向に一周 したときの写像 $t \circ s$ の像である $K_r(x^2)$ の回転数のことを示す.

 $x^n = t \circ s(\theta)$ という一般の場合, 射影 $K_r(x)$ は n 個の成分にわかれる.よって, すべての成分の回転量を考慮したほうがよい場合のことを考えて, 以下の定義を与える.

定義 2.17 連結成分の数を n 個とし, それぞれの成分の回転数が m 回転のとき, 絡み目 $K_r(x)$ の回 転数を nm とする.

例 2.11 多項式 $x^2 + y^2$ の特異点の *link* の射影 $K_r(x^2)$ の回転数は 2 である. また, $K_r(x)$ の回転数 は, 2 つの成分の回転数がそれぞれ 1 であるから, 2 × 1 = 2 となる.

例 2.12 多項式 $x^2 + y^3$ の特異点の *link* の射影 $K_r(x^2)$ の回転数は 3 である. また, $K_r(x)$ の回転数 は, 2 つの成分の回転数がそれぞれ $\frac{3}{2}$ であるから, $2 \times \frac{3}{2} = 3$ となる.

補題 2.4 $(x^p + y^n + y^m \text{ o } link \text{ o } link)$

複素多項式 $x^p + y^n + y^m$ (n < m) において, その特異点の *link* の射影 $K_r(x^p)$ の回転数は |y| が十分 に小さいときは n であり, 十分に大きいときは m である. また, $K_r(x)$ の回転数も同様である.

また, 複素多項式 $x^p + y^{n_1} + y^{n_2} + \cdots + y^{n_l} (n_1 < n_2 < \cdots < n_l)$ において, その特異点の *link* の 射影 $K_r(x^2)$ の回転数は |y| が十分に小さければ n_1 であり, 十分に大きければ n_l である.

link の射影上の Morse 関数

さて, 複素二変数多項式 $f(x,y) = x^2 + y^2 + y^3$ に関して, その link の射影 K_r のトポロジーを調べる ための Morse 関数 h を導入する.

紛らわしいので恐縮だが、零点集合 V の上の Morse 関数と絡み目の射影である $K_r(x^2)$ 上の Morse 関数を本論文では明確に区別している. いま計算しようとしているのは射影 $K_r(x^2)$ 上の Morse 関数 である.

実際に、この多項式 f の特異点に関する link $K_r(x^2)$ について、指数を計算する. $y = re^{i\psi}$ と置く. 多項式 $f(x, y) = x^2 + y^2 + y^3$ の零点集合 $V = f^{-1}(0)$ と Y_r との共通部分を K_r とした.

 K_r は零点集合でもあるから, $x^2 = -y^2 - y^3$ である.

いままで, r = |y|を固定して, $K_r(x^2)$ を見てきたが, rを固定し, $\psi \in y$ についての唯一の変数とする.

射影上の Morse 関数は,

$$h: K_r(x^2) = K_r(-y^2 - y^3) \ni \psi \to -r^2 \sin 2\psi - r^3 \sin 3\psi \in \mathbb{R}$$

とする. 実関数 h は三角関数であるから可微分関数であるし, K_r はコンパクトな可微分多様体である. ただし、 $y = re^{i\psi}$ であり、

Morse 関数 h に見られる $r や \psi$ は y の変数であることに注意.

 $(0\geq\psi\geq2\pi)$

射影上の Morse 関数 h は $K_r(x^2) = K_r(-y^2 - y^3)$ という複素平面の射影に対して, 虚軸方向の 高さ関数である. また, y の偏角 ψ を変数とする実一変数多項式であり, r は定数である. ゆえに, 特 異点は, 単純に ψ に関する微分が消える点である. もちろん, K_r の実軸方向, 横方向の大きさを表す $-r^2 \cos 2\psi - r^3 \cos 3\psi$ の方を用いてもよい. だが, その場合, 特異値が同じになってしまうので, Morse 関数にするために摂動しなければならないので, 今回は, sin を用いて, 虚軸方向の関数をとった.

$$\frac{\partial h}{\partial \psi} = -2r^2 \cos 2\psi - 3r^3 \cos 3\psi$$
$$= 0$$

よって,

$$\frac{\partial h}{\partial \psi} = 0 \Leftrightarrow -2\cos 2\psi - 3r\cos 3\psi = 0$$

ここで, gの特異点は $\lim_{r\to 0} g = \lim_{r\to 0} -2\sin 2\psi - 3r\sin 3\psi = -2\sin 2\psi$ のとき, $-2\cos 2\psi = 0$ となるような ψ である. つまり, $2\psi = \frac{\pi}{2}$ か $2\psi = \frac{3\pi}{2}$ となる ψ である.

つまり,

$$\frac{dh}{d\psi} = 0 \iff \psi = \frac{\pi}{4} \frac{3\pi}{4}$$

rがいくらでも小さいとき, hの特異点は四つである. それは, $\frac{\pi}{4}$ と $\frac{5\pi}{4}$, および, $\frac{3\pi}{4}$ と $\frac{7\pi}{4}$ の合わせて4点である.

そのときのヘッセ行列は,

 $\psi = \frac{\pi}{4}$ のときは、 $\lim_{r \to 0} dg = -2\cos 2\psi$ より、 ヘッシアンは $\frac{d^2h}{d\psi^2} = 4\sin 2\psi$ とみなしてよいから、

$$\tfrac{d^2h}{d\psi^2} = 4\sin 2\psi = 4\sin \tfrac{\pi}{4} = 4 > 0 (r \to 0)$$

であり,指数1である.

 $\psi = \frac{3\pi}{4}$ のときは、

$$\frac{d^2h}{d\psi^2} = 4\sin 2\psi = 4\sin \frac{3\pi}{4} = -4 < 0(r \to 0)$$

であり,指数0である. また, $\psi = \frac{5\pi}{4}$ のときは,

$$\frac{d^2h}{d\psi^2} = 4\sin 2\psi = 4\sin \frac{\pi}{2} = 4 > 0(r \to 0)$$

であり、指数1である. $\psi = \frac{7\pi}{4}$ のときは、

$$\frac{d^2h}{d\psi^2} = 4\sin 2\psi = 4\sin \frac{14\pi}{2} = -4 < 0(r \to 0)$$

で,指数は 0. このときの h の特異点はすべて非退化であることがわかる. ゆえに, h は Morse 関数である. Morse 指数は $\psi = \frac{\pi}{4} \ge \frac{5\pi}{4}$ のとき 1 であり, $\psi = \frac{3\pi}{4} \ge \frac{7\pi}{4}$ のとき 0 である.

このときの h の特異値は,

 $\psi = \frac{\pi}{4}$ のときは, $h(\frac{\pi}{4}) = -r^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}r^3$ である. (最小の特異値)(指数1) $\psi = \frac{3\pi}{4}$ のときは, $h(\frac{3\pi}{4}) = r^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}r^3$ である. (二番目に大きな特異値)(指数0)

 $\psi = \frac{5\pi}{4}$ のときは, $h(\frac{5\pi}{4}) = -r^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}r^3$ である. (二番目に小さな得値)(指数 1) $\psi = \frac{7\pi}{4}$ のときは, $h(\frac{7\pi}{4}) = r^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}r^3$ である. (最大の特異値)(指数 0)

Morse 理論に従えば, K_r のトポロジーは r がいくらでも小さいときは, 特異値が小さい順に胞体が特異点に付与されるため,

$$K_r \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_1^0 \cup e_2^0$$

となることがわかる.

表 2: r が限りなく小さいときの K_r 上可微分関数 g における特異点, 指数, 対応する胞体 特異点 n_i ヘッセ行列式 sin 2ψ の値 Morse 指数 特異値 $h(n_i)$ 対応する胞体

$10 \times p_i$		MOISC 183X	有其他 $n(p_i)$	
$p_1 = \frac{\pi}{4}$	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	1	$-r^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}r^3$ (最小値)	1 次元胞体 e_1^1
$p_2 = \frac{3\pi}{4}$	$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$	0	$r^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}r^3$	0 次元胞体 e_1^0
$p_3 = \frac{5\pi}{4}$	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	1	$-r^{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}r^{3}$	1 次元胞体 e_2^1
$p_4 = \frac{7\pi}{4}$	$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$	0	$r^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}r^3$ (最大値)	0 次元胞体 e_2^0

 $h(p_1) < h(p_3) < h(p_2) < h(p_4)$ となる大小関係が成立している.

ここで, Morse 理論 (定理 Morse1 と定理 Morse2 と Morse 理論の基本定理)を適用すると,

$$\begin{split} M^{p_1-\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_1-\varepsilon] = \emptyset \\ M^{p_1+\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_1+\varepsilon] \simeq e_1^1 \\ M^{p_3+\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_3+\varepsilon] \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \\ M^{p_2+\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_2+\varepsilon) \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_1^0 \\ M^{p_4+\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_4+\varepsilon) \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_1^0 \cup e_2^0 \\ M^{\infty} &= h^{-1}(-\infty, \infty) = K_r(x^2) \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_1^0 \cup e_2^0 \end{split}$$

となる.

Morse 理論からでは、一次元胞体 $e_1^1 \ge e_2^1$ が現れて、二つのゼロ次元胞体 $e_1^0 \ge e_2^0$ の2つの点に収まるということしかわからない。だが、二つの一次元胞体と二つのゼロ次元胞体の組み合わせは、連結成分が2つになる組み合わせか、連結成分が1つになる組み合わせかの二通りしかない。 ところが、多項式 $x^2 = -y^2 - y^3$ の link の射影 $K_r(x^2)$ は y が正の方向に一周すれば、 $-y^2 - y^3$ も同じ点に戻る結び目だったから、 $K_r(x^2)$ の連結成分は1であることが、多項式の零点集合の定義からわかる。

|y|が一周するとき, $K_r(x^2)$ の特異点はその番号順に通過する. 出発点を $-r^2 - r^3$ とすると, 出発 点 $\rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3 \rightarrow p_4 \rightarrow$ 出発点へと戻る順方向の経路をたどる. 四つの特異値が負が二つ $(p_1 \ge p_3)$ で正が二つ $(p_2 \ge p_4)$ であることから, 射影 K_r は複素平面の零点を二回転する図形であること がわかる. なぜなら, $K_r(x^2)$ の実軸への射影の関数 $-r^2 \cos 2\psi - r^3 \cos 3\psi$ を合わせて考えることで K_r の様相が特定できるからである.

最小の特異値に対応する特異点 p_1 に付随する 1 次元胞体 e_1^1 の一次元の線分を伸ばしていくと、その特異点から出た左右二本の線分は二つのゼロ次元胞体 $e_1^0(p_2)$ と $e_2^0(p_4)$ へと収まる. そして、二番目に小さい特異点 p_3 から出てくる一次元胞体の左右二本の線分は同様に $e_2^0(p_4)$ と $e_1^0(p_2)$ へと収まる. このことから、rが十分に小さいとき、 $K_r(x^2)$ の回転数は 2 であることが特定できる. Morseの理論と零点集合の一般的な性質によっても、先ほどと同様にわかるのである.

一方で, r が限りなく大きいときはどうであろう. $\frac{dh}{d\psi} = 0 \iff -2\cos 2\psi - 3r\cos 3\psi = 0 \iff -\frac{2}{r}\cos 2\psi - 3\cos 3\psi = 0$ であるから,

 $\lim_{r \to \infty} \frac{dg}{d\psi} = -3\cos 3\psi$ となる.

よって, $dh = 0 \iff \cos 3\psi = 0$ であり, そのような ψ は $\frac{\pi}{2}$ と $\frac{3\pi}{2}$ がある. さらに, $\frac{\pi}{6}$ と $\frac{5\pi}{6}$, そして, $\frac{7\pi}{6}$ と $\frac{11\pi}{6}$ がある. 全部で特異点 6 つである.

rが限りなく小さいときと同様に、まとめたものが以下の表である.

表 3: r が限りなく大きいときの K_r 上可微分関数 h における特異点, 指数, 対応する胞体 特異点 p_i ヘッセ行列式 sin 3ψ の値 Morse 指数 特異値 $h(p_i)$ 対応する胞体

137300 Pi	, = 13 , 3ℓ (δ 11 0 φ) Ε	110100 11 //	$13 \times 12 \times (Pi)$,,, <u>,</u> ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
$p_1 = \frac{\pi}{6}$	$\sin \frac{3\pi}{6} = 1$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2 - r^3$ (最小値)	1 次元胞体 e_1^1
$p_2 = \frac{3\pi}{6}$	$\sin \frac{9\pi}{6} = -1$	0	r^3	0 次元胞体 e_1^0
$p_3 = \frac{5\pi}{6}$	$\sin \frac{15\pi}{6} = 1$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}r^2 - r^3$	1 次元胞体 e_2^1
$p_4 = \frac{7\pi}{6}$	$\sin \frac{21\pi}{6} = -1$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2 + r^3$	0 次元胞体 e_2^0
$p_5 = \frac{9\pi}{6}$	$\sin \frac{27\pi}{6} = 1$	1	$-r^{3}$	1 次元胞体 e_3^1
$p_6 = \frac{11\pi}{6}$	$\sin \frac{33\pi}{6} = -1$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}r^2 + r^3$ (最大値)	0 次元胞体 e_3^0

 $h(p_1) < h(p_5) < h(p_3) < h(p_4) < h(p_2) < h(p_6)$ となる大小関係が成立している.

r が限りなく大きいときは, Morse 理論 (定理 Morse1 と定理 Morse2 と Morse 理論の基本定理) を適用すると,

$$\begin{split} M^{p_1-\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_1 - \varepsilon] = \emptyset \\ M^{p_1+\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_1 + \varepsilon] \simeq e_1^1 \\ M^{p_5+\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_5 + \varepsilon] \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \\ M^{p_3+\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_3 + \varepsilon) \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_3^1 \\ M^{p_4+\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_4 + \varepsilon) \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_3^1 \cup e_1^0 \\ M^{p_2+\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_2 + \varepsilon) \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_3^1 \cup e_1^0 \cup e_2^0 \\ M^{p_6+\varepsilon} &= h^{-1}(-\infty, p_6 + \varepsilon) \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_3^1 \cup e_1^0 \cup e_2^0 \cup e_3^0 \\ M^{\infty} &= h^{-1}(-\infty, \infty) = K_r(x^2) \simeq e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_3^1 \cup e_1^0 \cup e_2^0 \cup e_3^0 \\ \end{split}$$

となる.

この場合, y が Y_r を正の向きに一周するとき, $K_r(x^2)$ は $(-r^2 - r^3, 0) \in \mathbb{C}^2$ から出発する. そして, 出発点から $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ の順に通り, また, 出発点に戻る.

つまり, Y_r における y を正に一周するとき, 特異点 p_1 に付随する 1 次元胞体 e_1^1 の両端は p_2 と p_6 につながっている. p_3 からの 1 次元胞体 e_2^1 の両端は p_2 と p_4 につながっている. そして, p_5 からの 1 次元胞体 e_3^1 の両端は p_4 と p_6 につながっている. $h(p_i)$ は特異点 p_i の虚軸方向への高さを表すも のであり, $h(p_1) < h(p_5) < h(p_3) < h(p_4) < h(p_2) < h(p_6)$ となる大小関係が成立していることか

ら, $K_r(x^2)$ が順方向へ3周することがわかる. 先ほどの結果, $K_r(x^2)$ の回転数3と一致する.

よって、多項式 $x^2 + y^2 + y^3$ における特異点の link $K_r(x^2)$ について、yの大きさrが限りなく小さいときは、 $K_r(x^2)$ の回転数が2 であることが Morse 理論と多項式の零点集合の特徴からわかった.また、yの大きさrが限りなく大きいときは、 $K_r(x^2)$ の回転数が3 であることもわかった.

これまで, $K_r(x^2)$ というものを見ていた. 今度は, $K_r(x)$ について考察する. つまり, x^2 ではなくて, $\pm \sqrt{x^2}$ というふたつの成分について考える.

r が極めて小さいとき, $K_r(x^2)$ は, 原点を順方向に 2 周する S^1 であった. これに平方を施す と, $\pm \sqrt{x^2}$ という 2 つの S^1 がそれぞれ 1 周することになる.

平方をとれば、2周の半分の1周しか回らない代わりに、成分は2つになる. これは、 braid 表示では $\sigma_1^2 \in B_2$ である.

また, r が極めて大きいとき, $K_r(x^2)$ は順方向へ3周する S^1 であった. これも, 平方をとれば, 二つの成分に分かれるが, 前に見た通り, 互いに $\frac{3}{2}$ 周してつながる knot になる. braid 表示では σ_1^3 である.

よって, 多項式 $x^2 + y^2 + y^3$ の特異点の link $K_r(x)$ のトポロジーは r が極めて小さいとき, σ_1^2 と表示できる. また, r が極めて大きいとき, σ_1^3 と表示できる.

観察結果 2.1 複素に変数多項式 $x^2 + y^n + y^m (n < m)$ では, その link の射影 $K_r(x)$ の braid 表示 は, |y| = r が小さいときは, σ_1^n であり, r が大きいときは σ_1^m である.

観察に対する理論的な考察は、link の射影上の Morse 関数 $g: K_r(x^2) \to \mathbb{R}$ について、 $g(\psi) = -r^n \sin n\psi - r^m \sin m\psi$ と置く. g の特異点の数は、r が小さいとき、 $dg = -\cos n\psi = 0$ の解の個数 であるから、2n 個である. そのとき、正の特異点と負の特異点がそれぞれ n 個となる. ヘッシアンが $\sin n\psi = \pm 1$ であるからである.

これに Morse 理論を適用する. つまり, n 個の 1 次元胞体と 0 次元胞体によって $K_r(x^2)$ は表すこと ができる.

また, r が大きいとき, 特異点の数は 2m となる. 同様に, $K_r(x^p)$ は m 個の 1 次元胞体と 0 次元胞 体によって表すことができる.

よって, 明らかに $K_r(x^2)$ の回転数は r が小さいとき, n であり, r が大きいときには m である. braid の表現では, r が小さいとき, σ_1^n と表示できる. r が大きいときは, σ_1^m と表示できる.

また, 平方を取る操作は, 回転数を変えない. p 乗根をとれば, 回転数が $\frac{1}{p}$ になるものの, 成分が p 倍になるからである. つまり,

$\frac{n}{p} \times p = n$

このことから, $x^p + y^n + y^m (n < m)$ という多項式の link $K_r(x)$ の回転数は, r が小さいとき n であり, r が大きいとき m となることがわかる.

そのとき, link の射影上の Morse 関数は $g: K_r(x^p) \to \mathbb{R}$ を $g(\psi) = -r^n \sin n\psi - r^m \sin m\psi$ と置け ばよい. 特異点の数は, r が小さいとき, 2n であり, 正の特異点と負の特異点が n 個となり, 同様に Morse 理論が適用できる. つまり, n 個の 1 次元胞体と 0 次元胞体によって K_r は表すことができる. r が大きいとき, 特異点の数は 2m であるし, $K_r(x^p)$ は m 個の 1 次元胞体と 0 次元胞体によって表す ことができる.これで、観察結果に対しての考察を与えたことになる.

観察結果 2.2 二変数複素多項式 $x^p + y^m + y^n$ について, その零点集合 $y^m + y^n = -x^p \pm 0$ Morse 関数は $y = re^{i\psi}$ とすれば, $g(r,\psi) = r^m + r^n \cos(n-m)\psi$ とできる. この Morse 関数を $r \leq R$ に制限したものは, コンパクトな Riemann 面 $\bigcup_{r\geq 0}^R K_r$ 上の関数となる. 場合により特異値が同一となる特異点があれば, 関数を摂動すればよい.

そのとき, Morse 特異点は (n – m) 個であり, Morse 指数は1 である.

Morse 特異点は $(r, \psi) = (\frac{m}{n})^{\frac{1}{p}}, \frac{2j+1}{n-m}\pi$) である.

ただし, n > m であり, $0 \le j < 2(m - n)$ となる. このとき, V を切る球面が十分小さく, Morse 特異点を含まないとき, 特異点の結び目は m 重巻きである. 球面が十分大きくなると Morse 特異点を含むため, 特異点の数 n - m だけ正の braid が合成される. そして, n 重の結び目となる.

 $\bigcup K_r$ 上の Morse 関数 $g(r, \psi) = r^m + r^n \cos(n-m)\psi$ を摂動するためには、たとえば、1 に限りな く近い実数を c として、 $g(r, \psi) = r^m + r^n \cos c(n-m)\psi$ のように摂動すればよい.

補題 2.5 多項式 $x^p + y^m + y^n$ について, その特異点の結び目(絡み目)の射影 $K_r(x^p)$ 上の Morse 関数は,

 $h(\psi) = r^m \sin m\psi + r^n \sin n\psi$ とできる. ただし, $y = re^{i\psi}$ とする. また, n > m とする. このとき, r を定数と見ている.

この一変数の Morse 関数 h の特異点の数は定数 |y| = rの大きさに依存する. r が十分小さいとき, 特異点の数は 2m 個であり, そのうち, Morse 指数 1 の特異点は m 個である. r が十分に大きいとき, その数は 2n 個となる. そのうち, Morse 指数が 1 のものは n 個である. 結び目の回転数は Morse 指数 1 の特異点の数に対応する.

rが小さいとき, $K_r(x^p)$ は m 回転であり, braid 表示は $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{m-1}$ となる. rが大きいとき, $K_r(x^p)$ は n 回転であり, braid 表示は $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ となる.

また,以下も明らかであろう.

観察結果 2.3 複素二変数多項式 $x^p + y^{n_1} + y^{n_2} \cdots + y_{n_l}(n_1 < n_2 < \cdots < n_l)$ の特異点の *link*の射影 $K_r(x)$ の回転数は, Y_r における |y| = rが限りなく小さいときは n_1 回転である. rが限りなく大きいときは n_l 回転である.

いよいよ, 観察結果とそれに対する理論的な説明である.

観察結果 2.4 二変数複素多項式 $f(x,y) = x^p + x^q + y^m + y^n$ において, その特異点に付随する link K の x の射影の braid 表示は, 三次元球面 S³ の径の大きさに依存する. S³ の径が十分小さいと き, $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1})^p$ と表示できる. また, S³ の径が十分に大きいとき, $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1}\cdots\sigma_{n-1})^q$ と 表示できる. ただし, p < q, m < n とする. また, $p, q, m, n \in \mathbb{N}$ とする.

零点集合 $y^m + y^n = -x^p - x^q \pm \mathcal{O}$ Morse 関数 $g(r, \psi) = r^m + y^n \cos(n-m)\psi \ \varepsilon \ r \leq R$ に制限す る. $\bigcup_{r>0}^R K_r \pm c$, Morse 特異点を (n-m) 個, 得ることができる. 必要なら関数は摂動する. これらの特異点の Morse 指数はすべて1 である.

これらの Morse 特異点は原点以外に存在するため, とても小さな球面で切ると V は特異点を含まない. 球面を大きくすると, V の内部は特異点を含むようになるため, トポロジー的には braid を (n – m) 個付け加える操作が対応する.

 $K_r(x^p + x^q)$ は結び目であった.また, K_r の上の Morse 関数 $h(\psi) = r^m \sin m\psi + r^n \sin n\psi$ を用い ると, その特異点は |y|が十分に小さいとき, m 個である.特異点の link の braid 表示は $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{m-1}$ であり, |y|が十分に大きいとき, V上の Morse 関数 gの特異点の数 (n - m)の個数だけ braid を加 えるため, その braid 表示は $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{m-1} \cdots \sigma_{n-1}$ となる.

 S^3 の半径が十分に小さいときは、多項式 $f(x,y) = x^p + x^q + y^m + y^n$ の零点集合は、 $x^p + y^m = 0$ と見ることができる. ゆえに、 $K_r(x)$ の braid 表示は、|y|が十分に小さいとき、(S^3 の半径も十分小さいので、)($\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1}$)^p と表現できる.

そして, S^3 の半径が十分に大きいときは, |y|も十分大きいから, 多項式は $x^q + y^n = 0$ と見なすことができる. そのとき, $K_r(x)$ の braid 表示は $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{m-1} \cdots \sigma_{n-1})^q$ である. $K_r(y)$ についても同様にすればよい. また, K_r と Kの一対一の連続的な対応は, 前に確かめた.



図 60: K の変遷のイメージ図. Morse 特異点の数だけ braid が付与される

以降は、実際に、様々な Kr の射影を図示していく.

3 いくつかの具体例の計算結果

多項式 $x^2 + x^5 + y^2 + y^3$ の特異点の結び目

例 3.1 多項式 $x^2 + x^5 + y^2 + y^3$ を例にとり, その特異点の結び目(絡み目)を調べる. 零点集合 - $x^2 - x^5 = y^2 + y^3$ 上の Morse 関数を $g(t, \theta) = t^2 + t^5 \cos c3\theta$ とし, $x = te^{i\theta}$ とする. $V \bigcup_{r>0}^{R} X_r$ 上に制限した Morse 関数 g の特異点は計算によって, $((\frac{m}{n})^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}\pi), ((\frac{m}{n})^{\frac{1}{3}}, \pi), (\frac{m}{n}^{\frac{1}{3}}, \frac{5}{3}\pi)$

 $O_{r\geq 0}$ A_r 上に間隔 じた Morse 閑奴 g の内 (気気は) 単によ D (n)^o, 3^n), $((n)^o, n)$, $(n)^o, (n)$, $(n)^o, (n)$, $(n)^o, (n)^o, (n)$, $(n)^o, (n)^o, (n$

また, 射影 $K_r(y^2 + y^3)$ 上の Morse 関数 $h(\psi) = r^2 \sin 2\psi + r^3 \sin 3\psi$ とする. ただし, $y = re^{i\psi}$ である.

 $h \circ Morse$ 指数1の Morse特異点の数はrが小さいときは2個でrが大きいときは3個である. つまり,この多項式の特異点の結び目(絡み目)の braid 表示は, |x| = tが小さいとき σ_1^2 であり, |x| = tが大きいときは, $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^3$ となる.

それは, すわなち, $V \cap X_r$ の y への射影 $K_r(y)$ である. 以下の図は, y についての三次方程式 $y^3 + y^2 + x^2 + x^5 = 0$ を x を定数として解いたものを複素平面上に y へ射影したものである.

 $\bigcup K_r$ 上の Morse 関数, 鞍点が三箇所確認できる.



図 61: $\bigcup K_r$ 上の Morse 関数 $g(t, \theta) = t^2 + t^5 \cos 3\theta$

|x|が十分に小さいときの射影 $K_r(y)$. 図の色の違いは, yの3つの解を3つに色分けしたものである.

例 3.2 |x| が十分に大きいときの射影 $K_r(y)$. 特異点の結び目の y を射影したものであり, 3 つの y 成分で 5 重の結び目となっている. $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)^3$ がその braid 表示である.

図は、多項式 $x^2 + x^5 + y^2 + y^3$ の特異点の結び目の x 平面への射影 $\bigcup K_r(y^2 + y^3)$ である.



図 62: $x^2 + x^5 + y^2 + y^3 = 0$ の射影 $K_r(y)$ で $|x| = \frac{1}{9}$



図 63: $x^2 + x^5 + y^2 + y^3 = 0$ の射影 $K_r(y)$ で $|x| = \frac{6}{5}$



図 64: $\bigcup K_r(y^2 + y^3)$ の図

 $f(x,y) = x^2 + y^2 + y^3$ の特異点の結び目の射影 $K_r(x)$

 $x^{2} + y^{2} + y^{3}$ の特異点の結び目(絡み目)の射影 $K_{r}(x)$ を見てみよう. |y|の大きさを零に近いと ころから始めて、徐々に大きくしていく.

 x^{2} については, 0 < |y| < 1のとき, $K_{r}(x^{2})$ の回転数が2であり, 1 < |y|のとき, $K_{r}(x^{2})$ の回転数は 3であった.

 $K_r(x^2)$ がわかれば, $K_r(x)$ が特定できる. それぞれの $K_r(x^2)$ の1点について, 二つの x が対応す る. たとえば, $x^2 = 1$ であれば, $x = \pm 1$ であり, $x^2 = -1$ であれば, $x = \pm i$ である.

以下, 左図は, $|y| = \frac{1}{27}$ のときの $K_r(x)$ である. 右は $|y| = \frac{1}{9}$ のときの $K_r(x)$ である.

上の K_r は $ai(\exists a \in \mathbb{R}_+)$ となる純虚数から反時計回りに 1 周する円であり, 下の $K_r(x)$ は $-ai(\exists a \in \mathbb{R}_+)$ ℝ+) という純虚数から反時計回りに1周する. 二つの円は上下にずれており, お互いに 180 度偏角が ずれる対蹠点にある. つまり, 2つの楕円からなる Hopf link である.



 \boxtimes 65: $K_r(x)$. $|y| = \frac{1}{27}$



ちょっとだけずれているが, Y_r の大きさ $|y| = \frac{1}{27}$ のとき, yの偏角が0から π までの $K_r(x)$ が左 図. π から 2π までの $K_r(x)$ が右図である. y が反時計回りで 1 周すれば, $K_r(x)$ も 1 周する. K_r が 2 つの円であることがわかる.

ひとつは、上から下へ行って上に戻る円(上の Kr).もうひとつは、下から上に行って下に戻る円(下 $\mathcal{O}(K_r)$ である.





図 67: $K_r(x)$. $|y| = \frac{1}{27}$. y の偏角 0 から 図 68: $K_r(x)$. $|y| = \frac{1}{27}$. y の偏角は π か 52π

以下, $|y| = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$ のときの $K_r(x)$ (左図) と $|y| = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$ のときの K_r (右図) である. $y = -\frac{2}{3}$ のとき, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となるから, 右図では, $x^2 = -y^2 - y^3 = -(\frac{2}{3})^2 - (-\frac{2}{3})^3 = \frac{4}{27}$ となる $x=\pm i\sqrt{\frac{4}{27}}=\pm i\frac{2}{3\sqrt{3}}(約\ (0,\pm 0.3849i))$ のところで, 尖点が見える.





 $|\mathbb{X}|$ 69: $K_r(x)$. $|y| = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

図 70: $K_r(x)$. $|y| = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$. $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点 $(y = -\frac{2}{3})$ を含む

以下, 左図は, $|y| = \frac{7}{9}$ で上の K_r において原点の下に小さな輪をつくるが, 回転数としては 1 である. 同様に, 下の K_r は原点の上に小さな輪をつくるが, 回転数としてはやはり 1 である.

右図は, $|y| = \frac{26}{27}$ であり, 生じた輪が上の K_r においても, 下の K_r においても大きくなっているが, その輪たちは, 原点を超えないため, どちらの K_r も回転数はやはり 1 である.



以下, 左図は, 劇的である.

|y| = 1において, 2つの K_r たちは原点で連結される. $K_r(x)$ は連結成分が 2 から 1 となった. 右図は, 連結された K_r が原点を中心に 3 回転するところ. 上の K_r は上から正の向きに一回転して, 下へ行く. つまり, 1.5 回転する. そして, 下の K_r とつながる. 一方で, 下の K_r は一回転して上に行く. やはり, 1.5 回転すして上の K_r とつながる.



図 73: $K_r(x)$. $|y| = \frac{27}{27} = 1$. 連結成分が 2 から 1 へ変わる局面



図 74: *K_r*(*x*). |*y*| = ²⁸/₂₇. 上の *K_r* が 1 周 半と下の *K_r* が 1 周半で両者は連結され ている





🖾 75: $K_r(x)$. $|y| = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}$. trefoil 🖾 76: $K_r(x)$. $|y| = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$. trefoil

ここで, link の回る向きが見えにくいので, 上の K_r と下の K_r が原点付近でぶつかる様子を内部 を影にして示したのが例 3.3 である.



図 77: 交差前. 原点の近くの V の内部



図 78: 交差後の原点の周りの V の内部

例 3.3

$x^2 + y^2 + y^3$ のもう一つの特異値 $\frac{4}{27}$ の逆像 $f^{-1}(\frac{4}{27})$

例 3.4 多項式 $f = x^2 + y^2 + y^3$ の特異点 (0,0) に付随する *link* K_r の様相を調べたが, もう一つの特 異点 $(0, -\frac{2}{3})$ の *link* $f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap Y_r$ についても調べる. fの零点集合 $V = f^{-1}(0) \cap Y_r$ と重ね合わせて た射影が以下である.

 $f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap Y_r$ の方は, 左右に二重巻きの円たちが現れる. (図 79以降の赤色の円).



 $\begin{array}{lll} \boxtimes & 79: \ \left\{f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\frac{4}{27})\right\} \cap Y_r. \ |y| = & \ \boxtimes & 80: \ \left\{f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\frac{4}{27})\right\} \cap Y_r. \ |y| = \\ \frac{1}{27}. & & \frac{3}{27}. \end{array}$

以下,右図は, $f^{-1}(\frac{4}{27})\cap Y_r$ の方は連結成分がそれまでの2から1となる. $f = \frac{4}{27}$ において, $y = -\frac{2}{3}$ であれば,x = 0となるからである. $f^{-1}(\frac{4}{27})\cap Y_r$ がひとまず零点集合より先に trefoil へと変換することになる.これ以降は,零点集合と同様であるので略す. $f^{-1}(0)\cap Y_r$ も前述の通りの変遷を見せる.



図 81: $\{f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\frac{4}{27})\} \cap Y_r$. |y| = 図 82: $\{f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\frac{4}{27})\} \cap Y_r$. $|y| = \frac{8}{27}$. $\frac{9}{27} = \frac{2}{3}$. $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ の点 $y = -\frac{2}{3}$ を含む.



0.8 0.6 0.4 0.2 0.0 -0.2 -0.4 -0.6 -0.8

⊠ 84: $\{f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\frac{4}{27})\} \cap Y_r$. $|y| = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$





 $\boxtimes 85: \{f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\frac{4}{27})\} \cap Y_r. |y| = \frac{26}{27}$

⊠ 86: $\{f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\frac{4}{27})\} \cap Y_r$. $|y| = \frac{27}{27} = 1$



0.5 0.0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0

2.0

1.5

1.0

 $\boxtimes 87: \{f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\frac{4}{27})\} \cap Y_r. \ |y| = \frac{28}{27} \qquad \boxtimes 88: \{f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\frac{4}{27})\} \cap Y_r. \ |y| = \frac{32}{27}$

 $f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap Y_r$ において, x の射影を見たわけだが, $|y| < \frac{2}{3}$ のときには、もう一つの特異点 $(0, -\frac{2}{3})$ に付随する円が左右に二つ存在した. これらの左右のふたつの円をあわせてひとつの Hopf link としてみることができる.

それが, $y = -\frac{2}{3}$ のときに, 連結成分として二つ左右の円が, ひとつの knot になり, $|y| > \frac{2}{3}$ では trefoil となった.

零点集合 $f^{-1}(0) \cap Y_r$ で |y| が十分に小さいときは、上下の一重巻きの楕円 (Hopf link) であった. 次 に、 $|y| = \frac{2}{3}$ のとき、上下の円にそれぞれ尖点ができる. その後、尖点から小さな結び目が生じる. その 2 つの結び目たちが、|y| = 1 のところで連結される. $y = -\frac{2}{3}$ のところで、 $f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap Y_r$ は、交差が生 じている.

$$f^{-1}(rac{4}{27})$$
を $\{Y_r-rac{2}{3}\}=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2; |y-rac{2}{3}|=r\}$ で切る

例 3.5 特異値 ⁴/₂₇ の逆像の計算.





 $|\mathbb{X}|$ 89: $f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap \{Y_r - \frac{2}{3}\}$. $|y - \frac{2}{3}| = \frac{10}{27}$

 \boxtimes 90: $f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap \{Y_r - \frac{2}{3}\}. |y - \frac{2}{3}| = \frac{11}{27}$



 $[\mathfrak{X} \ 91: \ f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap \{Y_r - \frac{2}{3}\}. \ |y - \frac{2}{3}| = \frac{15}{27} \qquad [\mathfrak{X} \ 92: \ f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap \{Y_r - \frac{2}{3}\}. \ |y - \frac{2}{3}| = \frac{18}{27}$



 $\boxtimes 93: \ f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap \{Y_r - \frac{2}{3}\}. \ |y - \frac{2}{3}| = \frac{26}{27} \qquad \boxtimes 94: \ f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap \{Y_r - \frac{2}{3}\}. \ |y - \frac{2}{3}| = \frac{27}{27}$



 $\boxtimes 95: \ f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap \{Y_r - \frac{2}{3}\}. \ |y - \frac{2}{3}| = \frac{28}{27} \qquad \boxtimes 96: \ f^{-1}(\frac{4}{27}) \cap \{Y_r - \frac{2}{3}\}. \ |y - \frac{2}{3}| = \frac{36}{27}$

例:多項式 $x^3 + y^2 + y^3$ における特異点の link $K_r(x)$ について

例 3.6 多項式 $x^3 + y^2 + y^3$ について, その特異点の *link* を射影する. x の冪を 2 から 3 に変えても, 回転数は不変であることを図示する.

 $K_r(x)$ は |y| = rが限りなく小さいとき, $x^3 = -y^2$ とみなせるから, 規約であり, 連結成分は1である. そして, |y| = rが限りなく大きいとき, $x^3 = -y^3$ とみなせるから, 可約であり, 連結成分は3となる. $K_r(x)$ の回転数はrが小さいとき2であり, rが大きいときは3となる.



図 97: $|y| = \frac{1}{3}$. $K_r(x)$. 連結成分 1. 回転数は 2



 $||||| 98: |y|| = \frac{2}{3}$



 \boxtimes 99: $|y| = \frac{22}{27}$



図 101: $|y| = \frac{28}{27}$. $K_r(x)$. 連結成分 3. 回 転数は 3



図 100: |y| = 1. Morse 特異点



 \boxtimes 102: |y| = 2.

例:多項式 $x^4 + y^2 + y^3$ における特異点の link $K_r(x)$ について

例 3.7 多項式 $x^4 + y^2 + y^3$ について, その特異点の *link* を射影する.

 $K_r(x)$ は |y| = rが限りなく小さいとき, $x^4 = -y^2$ とみなせるから, 可約であり, 連結成分は 2 である. そして, |y| = rが限りなく大きいとき, $x^4 = -y^3$ とみなせるから, 規約であり, 連結成分は 1 となる.



例:多項式 $x^2 + y^2 + y^3 + y^5$ における特異点の link $K_r(x)$ について

例 3.8 多項式 $x^2 + y^2 + y^3 + y^5$ について, その特異点の *link*を射影 $K_r(x)$ を図示する. $K_r(x)$ は |y| = rが限りなく小さいとき, $x^2 = -y^2$ とみなせるから, 可約であり, 連結成分は 2 であ る. そして, |y| = rが限りなく大きいとき, $x^2 = -y^5$ とみなせるから, 規約であり, 連結成分は 1 と なる. $K_r(x)$ の回転数は r が小さいとき 2 であり, r が大きいときは 5 となる.



図 109: $|y| = \frac{1}{15}$. $x^2 + y^2 + y^3 + y^5 \mathcal{O}$ $K_r(x)$. 連結成分 2. 回転数 2



 $|X| 111: |y| = \frac{26}{27}$



図 113: $|y| = \frac{8}{5}$. 連結成分 1. 回転数 5



図 110: $|y| = \frac{21}{27}$. 連結成分 1. 回転数 3



図 112: |y| = 1. Morse 特異点



🗵 114: |y| = 3

例:多項式 $x^2 + y^2 + y^3 + y^5 + y^6 + y^7$ の特異点 link $K_r(x^2)$

例 3.9 多項式 $x^2 + y^2 + y^3 + y^5 + y^5 + y^6 + y^7$ について, その特異点の *link* を射影 $K_r(x^2)$ を図示 する.

 $K_r(x)$ は |y| = rが限りなく小さいとき, 2 重の結び目となる.

そして, |y| = rが限りなく大きいとき, $x^2 = -y^7$ とみなせるから, 7 重の結び目となる. $K_r(x^2)$ の回転数はrが小さいとき 2 であり, rが大きいときは 7 となる.



図 115: $|y| = \frac{3}{27}$. $K_r(x^2)$. 2 重結び目



 \boxtimes 117: |y| = 1



図 119: $|y| = \frac{60}{27}$. 7 重 結び目 $K_r(x^2)$



 $|X| 116: |y| = \frac{21}{27}$



 $||X|| 118: |y| = \frac{30}{27}$



 \boxtimes 120: |y| = 2

多項式 $x^p + y^2 + y^7$ の特異点の結び目の射影 $K_r(x^p)$ の計算例

多項式 $x^p + y^2 + y^7$ の特異点の結び目の射影 $K_r(x^p)$ を図示する. r が十分に小さいときは, 2 重の結び目であり, r が十分に大きいときは 7 重の結び目である.



図 121: |y| = rが十分に小さいときの $K_r(x^p)$



図 122: |y| = rが十分に大きいときの $K_r(x^p)$

4 今後の課題

与えられた多項式を $x \ge y$ の一次の項で摂動しておけばy = 0においてはxだけの多項式で,r十分小では r = -定で切ればその次数の分だけ自明なknotが出る.rを大きくしていくと我々のよく知っている

1) Morse 指数1の特異点での現象,

2) 正則射影の分岐点における現象を繰り返して複雑な姿に成長してく.

r > 0 では $\log r$ の調和性から, 臨界点の Morse 指数は 1 のみである. (球面で切って半径を大き くしていく場合は強擬凸性から Morse 指数 2 のみが排除される.)

また, x-平面への射影の正則性により, r が増加するとき, Riemann 面 x-平面への像は常に境界 から外へと広がってゆく.

Riemann 面とその境界である knot の自然な向き付けを併せると, 臨界点の前後における振舞は, 正の向きの braid の生成であった.

一方, Riemann 面から x-平面への正則写像の分岐点では,境界曲線が正の向きに回転数1 増やし て自己交差を生じる. 組紐群の元としては,何も起こっていない. これらを総合し最終的に,正の向 きの braid の合成として組紐群の元としての表示が与えられることになるのであった.

Morse 関数を $h = |y|^2$ などの高さ関数と置けば, Morse 特異点は $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ のところにあることがわ かるし, そこでの Morse 指数は 1 であるから link の変化の様子がわかったのであった. だが, 多少, 実 務的な問題が残る. Morse 関数を |y| などでとってしまうと, 実際の Morse 特異点の位置の特定は, 例 えば $y + y^2 + y^5 + y^9 = c(c 定数)$ という方程式を解く必要があって, それは難しい. そのため, 本論 文では V 上の Morse 関数と射影 K_r 上の Morse 関数の 2 つを具体的に用意して, 特異点の位置の特 定を容易にする工夫を行った.

そして,理論的な考察を終えた後,様々な計算例を載せた.

さて、今後の課題である.

今回は、V を球面ではなく、シリンダー |y| = r で切ったため、小さい球面で切るべき特異点リンクを すべて見ているとは断言できない. エンド (r 十分大) で安定しているところは、球面で切ってもシ リンダーで切っても同じであることが容易に分かる. 多項式特異点のリンク (小さい球面で切ったリ ンク) がエンド (十分に大きい球面切ったもの) に現れるように多項式を作り変えることができるな ら総ての代数的結び目に対応しているといえるのだが、このことは(実は知られているのかもしれな いが)未確認である. 今後の課題のひとつとして、より一般の多項式の場合を考えたい.

謝辞

本論文を作成するにあたり,指導教授の三松佳彦先生には,4年間の長きに渡り,熱心かつ丁寧に ご指導を賜りました.先生は,ご自身では自明な事柄であっても,学生自身が数学を「発見」するま で,何ヶ月でもお待ちになりました.さぞや,忍耐の限界を何度も経験されたことでしょう.しかし,そ れにより,学生が自分自身で到達した結果は,その学生にとっての生涯の糧になるとお考えになって いたのだと思います.もちろん,これはわたしの勝手な想像であって,先生自らの口から直に聞いたこ とではありません.だから,わたしが三松研究室で学んだことは,突き詰めて言えば,「見えないもの」 であります.もしかしたら,学問とは技術や知識ではなく,わたしたちの中に息づく,人生への真摯な 態度であるのかもしれません.現代は,やれ生産性だの,効率だの 速く急いだ者たちが経済的な利益 を得る時代となってしまいました.グローバルな競争社会において,人間の自然な知的な成長を見守 るという態度は, 最高学府たる大学にしか, もはや残されていないのかもしれません. 幸いにも, (中 年ではありますが数学的には) 幼い芽 (にすぎないわたし) が自然に育つために 相当な我慢をし, 忍耐 強く真理へと一歩一歩近づくことのできる環境を先生や大学が用意していただいたことに対して, た だ感謝するのみです. 残念ながら, わたしのできることは, ささやかであり, 人類に対する文化的な貢 献は正直, 難しいのかもしれません. だが これから長寿社会を迎えるにあたって, 増加するであろう 社会人学生のひとりとして 気概をもって, 研究を続けていく決意を新たにしました.

三松先生と幾何の学生たちとの毎週木曜日のランチ会は,先生から示唆に富むその時々のトッピク を話していただいた良き思い出です.三松研究室の先輩である堀内智広氏や平本悠也君にはゼミで特 別にお世話になりました.同期卒業の幾何専攻のみなさまには,社会人である私に合わせて,わざわざ 夜間に自主ゼミを開催していただきました.高倉研究室の鈴木太郎氏には,数学一般に関する基礎演 習にお付き合いをお願いしました.また,中央大学数学科の先生方,そして,多くの大学関係者のみな さまにお世話になりました.職場の同僚と家族の理解がなければ,社会人のわたしは勉強を続けるこ とはできませんでした.みなさまに,深く感謝の意を表します.

参考文献

- [1] John Milnor. Singular Points of Complex Hypersurfaces. Princeton University Press(1968)
- [2] John Milnor. Morse Theory. Princeton Universit Press(1969)
- [3] 横田一郎. 多様体とモース理論. 現代数学社 (昭和 53 年)
- [4] I.M.Singer and J.A.Thorpe. Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry. Springer(1967)
- [5] 谷口雅彦, 奥村善英. 双曲幾何学への招待. 培風館 (1996)
- [6] L.V. アールフォルス著, 笠原乾吉訳. 複素解析. 現代数学社 (1979)