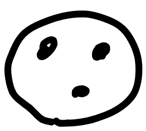
有理数の構成 by Taro Sensei

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{整数}} \times (\underbrace{\mathbb{Z} - \{0\}}_{\text{整数から「0」を抜いたもの}}) \ni (a,b), (x,y)$$

$a \cdot y = bx$ のとき $(a,b) \sim (x,y)$

と定める. $\sim$ は同値関係となる.



(0) $(a,b) \sim (x,y)$ or $(a,b) \not\sim (x,y)$

$ay = bx$ or $ay \neq bx$

ゆえに成立.

(1) $(a,b) \sim (a,b)$

$ab = ba$

(2) $(a,b) \sim (x,y) \Longrightarrow (x,y) \sim (a,b)$

$ay = bx$ より $bx = ay$　　$xb = ya$

$x \cdot b = y \cdot a$

$\mathbb{Z}$の積可換

(3) $(a,b)\sim(x,y)$, $(x,y)\sim(p,q)$

$\Rightarrow (a,b)\sim(p,q)$

i) $ay = bx$ 仮定 , ii) $xq = yp$ 仮定

上のi)とii)の両辺同士をかける. $\nearrow$ $ayxq = bxyp$

$xy\neq 0 \Rightarrow \quad aq = bp \Rightarrow (x,y)\sim(p,q)$

$xy = 0$ のとき

$\nearrow$ $y\neq 0$

$x=0$ ならば, $(y\in\mathbb{Z}-\{0\})$

$(a,b)\sim(0,y)$ より $ay = b\,0$

$y\neq 0$ より $a=0$

一方で, $(0,y)\sim(p,q)$ より

$p=0$ $\left(\begin{array}{l} y\cdot p = 0 \quad y\neq 0 \\ \Rightarrow p = 0 \end{array}\right)$

よって $aq = 0 = b\cdot p \Leftrightarrow (a,b)\sim(p,q)$

$$\left(\begin{array}{c} (x,y)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\}) \\ y\neq 0 \end{array}\right)$$

よって "$\sim$" は同値関係. //

直積の元

$(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ に対し

$[a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid (a,b) \sim (x,y)\}$

類

$= \{(x,y) \mid ay = bx\}$

$(a,b) \sim (x,y) \Leftrightarrow [a,b] = [x,y]$

$(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}))/\sim \; =: \mathbb{Q}$

この集合(商集合)に和・積を定義.

$[a,b], [c,d] \in \mathbb{Q},$

$$[a,b]+[c,d] := [ad+bc,\ bd]$$

$$[a,b][c,d] := [ac,\ bd]$$

- この定義が(well-definedness)であること.

definition

$(a,b)\sim(x,y),\quad (c,d)\sim(p,q)$

① $(ad+bc,\ bd)\sim(xq+yp,\ yq)$

② $(ac,\ bd)\sim(\cancel{cp}\,xp,\ \cancel{dq}\,yq)$ ←誤

を示したい. $\Leftrightarrow$ ① $(ad+bc)yq = bd(xq+yp)$ を示す. ② $(ac)(yq)=(bd)(xp)$ を示す

仮定より, $ay=bx,\quad cq=dp$

① を示す.

$$(ad+bc)yq - (xq+yp)bd$$

$$= adyq + bcyq - xqbd - ypbd$$

$$= (ay-bx)dq + (cq-dp)by = 0$$

$=0$ $\qquad\qquad$ $=0$

② を示す.

仮定

$ay = bx$, $cq = dp$ の両辺を

かけると $aycq = bxdp$

$$acyq = bxdp$$

$$(ac)(yq) = (bd)(xp) \quad //$$

$\Leftarrow$ $(ac, bd) \sim (xp, yq)$

より [,] + [,] と

[,] · [,] は

well-defined. //

④ 性質

(1-1-1)

$$[a,b] + [c,d] = [c,d] + [a,d]$$

(1-1-2)

$$[a,b]+([c,d]+[e,f])=([a,b]+[c,d])+[e,f]$$

については演習.

類同士の加法についての逆元

(1-1-3)

$[0,1]\in\mathbb{Q}$ を考える (零元)

注意 すべての $m\in\mathbb{Z}$ に対して

$$[0,1]=[0,m]$$

$$[a,b]+[0,1] \overset{\text{定義}}{:=} [a\cdot 1+b\cdot 0,\ b\cdot 1]$$

$$=[a,b]$$

$[0,1]$ は $\mathbb{Q}$ における "0"

(1-1-4)

$\forall [a,b]\in\mathbb{Q}$, $\exists [c,d]$ s.t.

$$([c,d]+[a,b]=0)\wedge([a,b]+[c,d]=0)$$

そこで　$[c, d] = [-a, b]$ とすれば、
（$-a$ は a の $\mathbb{Z}$ における逆元）

$$[a, b] + [-a, b] = [ab + (-ab), b^2]$$
$$= [0, b^2]$$
$$= [0, 1]$$

先ほどの注意

$[0, m] = [0, 1]$

一般に、$a + b = 0$ となる b は $-a$ と書かれる．
$\forall a$，

$$\therefore \; -[a, b] = [-a, b] \quad (\forall : \text{任意の})$$

類 $[a, b]$ の逆元という

これにより 引き算が

$$[a, b] - [c, d] = [a, b] + (-[c, d])$$
$$= [a, b] + [-c, d]$$

として定まる．

一方で、積については、

(1-2-1)

$$[a,b]\cdot[c,d]=[c,d]\cdot[a,b]$$

(1-2-2)

$$[a,b]\cdot([c,d]\cdot[e,f]) = ([a,b]\cdot[c,d])\cdot[e,f]$$

(exercise : 確かめよ.)

(1-2-3) 単位. 乗法単位. unit

注 $[1,1]\in\mathbb{Q}$ を考える

$$\forall m\in\mathbb{Z},\ m\neq 0,$$

$$[1,1]=[m,m]$$

$$\forall [a,b]\in\mathbb{Q},$$

$$[a,b]\cdot[1,1]=[a\cdot 1,\ b\cdot 1] = [a,b]$$

$$\left([1,1]\cdot[a,b]=[1\cdot a,\ 1\cdot b] = [a,b]\right)$$

つまり，$[1,1] \in \mathbb{Q}$ が $\mathbb{Q}$ における "1"．

(1-2-4)．$\forall [a,b] \in \mathbb{Q}$

$([a,b] \neq [0,1])$，$\exists [c,d] \in \mathbb{Q}$

s.t.，$[a,b] \bullet [c,d] = [1,1]$

$[a,b] \neq [0,1] \Rightarrow a \neq 0$

$[c,d] = [b,a]$ とすると．

$$[a,b] \bullet [b,a] = [ab, ba] = [ab, ab] = [1,1]$$

In general,

$a \neq 0$，$a \cdot b = 1 \Leftrightarrow b := a^{-1}$

$b := \frac{1}{a}$

（a とかけると 1 になる記号として

a^{-1}，$\frac{1}{a}$ と記す）

$$(a^1 a^{-1} = a^{(1-1)} = a^0 = 1)$$

a^{-1}は乗法逆元.
(inverse)

$$[a,b]^{-1} = [b,a].$$

これにより, わり算がdef.できる.

$$[a,b] \div [c,d] = [a,b] \cdot [c,d]^{-1}$$
$$([c,d] \neq [0,1]) \qquad = [a,b] \cdot [d,c]$$

(1-3)

$$[a,b] \cdot ([c,d] + [e,f])$$
$$= [a,b] \cdot [c,d] + [a,b] \cdot [e,f]$$

(exercise) (分配法則)

大小の定義

まず, $^\forall [a,b] \in \mathbb{Q}$ と

$[0,1] \in \mathbb{Q}$ との大小を定義する.

→ $\mathbb{Q}$における零元（加法）

- 「$a>0,\ b>0$」∧「$a<0,\ b<0$」のとき $[a,b]>[0,1]$ と定義する.
- 「$a>0,\ b<0$」∧「$a<0,\ b>0$」のとき $[a,b]<[0,1]$ と定義する
- $a=0$ のとき. $[0,b]=[0,1]$

この定義の well-definedness

$(a,b)\sim(x,y)$ のとき,

i) $[a,b]>[0,1] \Rightarrow [x,y]>[0,1]$ であること.

→ $a>0, b>0$ か $a<0, b<0$ $((a,b)\sim(x,y))$

In fact, $ay=bx$

$a,b>0 \Rightarrow x$ と y の正負は一致.

$a,b<0 \Rightarrow$ 〃.

よって、 $[x, y] > [0, 1]$

iii)

$[a, b], [c, d] \in \mathbb{Q}$ に対し、

$[a,b] - [c,d] > [0,1]$ のとき

$\Rightarrow$ $[a,b] > [c,d]$ と定める。

$[a,b] - [c,d] < [0,1]$ のとき

$[a,b] < [c,d]$ と定める

$$\left(\begin{array}{l} [a,b] - [c,d] = [0,1] \\ \Rightarrow \ [a,b] = [c,d] \end{array} \right)$$

(2-1)

$[a,b], [c,d] \in \mathbb{Q}$,

$[a,b] = [c,d] \wedge [a,b] > [c,d]$
$\wedge [a,b] < [c,d]$

のいずれか1つのみが成立する.

(2-2-1) ordered set condition

$[a,b] < [c,d]$ ならば

$[a,b] + [e,f] < [c,d] + [e,f]$

これを示すために.

$([c,d]+[e,f]) - ([a,b]+[e,f])$

$= [c,d] + [e,f] - [a,b] - [e,f]$

$= [c,d] - [a,b] > 0$ ← 仮定 //

$[a,b] > [c,d] \Leftrightarrow [c,d] < [a,b]$

(2-2-2)

- $[e,f] > [0,1]$ とする.
- $[a,b] < [c,d]$

$\Rightarrow [a,b][e,f] < [c,d][e,f]$

（正数 $[e,f]$ を両辺にかけても
不等号の向きをかわらない）

仮定より，

$[a,b] < [c,d]$

$\Longrightarrow \quad [c,d] - [a,b] > [0,1]$

そこで，$[p,q] = [c,d] - [a,b]$

とおく．

$[e,f] > [0,1]$，$[p,q] > [0,1]$

のとき，$[e,f][p,q] > [0,1]$

を示せばよい．

$[e,f][p,q] = [ep, fq]$

ep と fq の正負も等しい

e と f，p と q の正負は等しい

よって，$[e,f][p,q] > [0,1]$

$\shortparallel$

$[ep, fq]$

def.

(2-1-1)

$([a,b] < [c,d]) \land ([c,d] < [e,f])$

$\Rightarrow [a,b] < [e,f]$

By assumption,

$[c,d] - [a,b] > [0,1]$

$[e,f] - [c,d] > [0,1]$

$\Rightarrow$

$[e,f] - [a,b]$

$= ([e,f] - [c,d]) + ([c,d] - [a,b])$

$> ([e,f] - [c,d]) + [0,1]$

$[0,1]$

$> [0,1] + [0,1] = [0,1]$

$\Rightarrow [e,f] > [a,b]$ //

In general,

"+" and "$\cdot$" are defined
sum product

for set K, with the condition $\forall$(1-1-1) ~ (1-3), we call K
集合
体

"field" or $\mathbb{F}$.

In other words, $\mathbb{Q}$ is $\mathbb{F}$. (ℤは体 $\mathbb{F}$ ではない。)
体

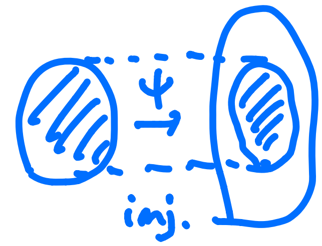
When the conditions (2-1) and (2-1-1) are satisfied, K is called
product unit

"total order set" 全順序集合

As a result, $\mathbb{Q}$ is total ordered field

$\mathbb{Q}$: 大小がきっちり定まった体

$$\begin{array}{cccl} \psi : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \text{map} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ m & \longmapsto & [m,1] & \end{array}$$



ψ: Injective map
単射

$\mathbb{Z}$ と $\psi(\mathbb{Z})$ とは 1:1 に対応

$\Longrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$[a,b] \in \mathbb{Q}$ を $\dfrac{a}{b}$ と記す.