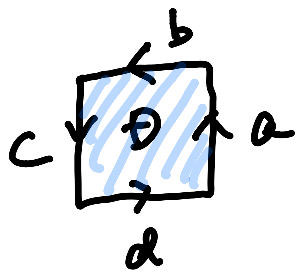
「楽しもう射影平面」大田春外 chapter 2
(page 24~58)

いろいろな曲面と閉曲面

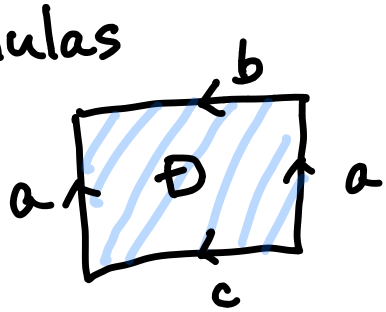


$\approx$

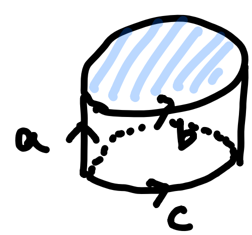
B^2: 円板

$abcd=1$ $a=1$

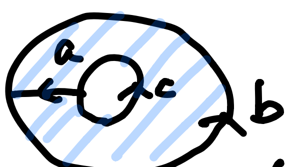
annulas



$\rightarrow$

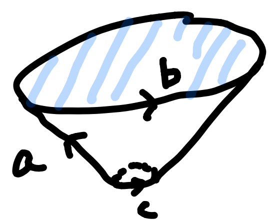


A



A''

$\approx$

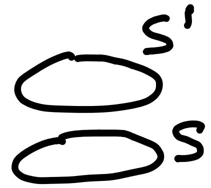


A'

$aba^{-1}c^{-1}=1$

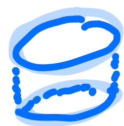
$A \approx A' \approx A''$

$$\underbrace{\mathrm{Bd}\,A}_{\text{boundary of annulas}} \approx S^1 \sqcup S^1$$



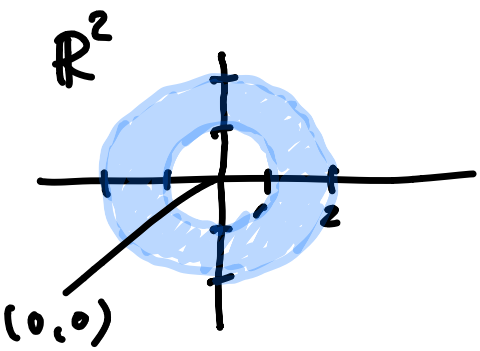
$\sqcup$ 交わらない和集合

‖

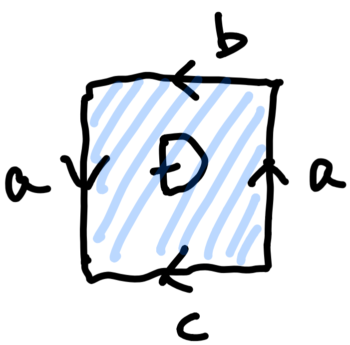


$$\begin{cases} S_1^1 \cup S_2^1 \\ S_1^1 \cap S_2^1 = \phi \end{cases}$$

$$A \approx \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$



Möbius band $\mathbb{M}$



$$abac^{-1} = 1$$

$\rightarrow$

$\mathbb{M}$

compare $\mathbb{M}$ w/ $\mathbb{A}$

$\mathrm{Bd}\,\mathbb{M}$? 単純閉曲線

$$\mathrm{Bd}\,\mathbb{M} \approx S^1$$

(fact) 曲面 S と S' $S \approx S'$

$\Rightarrow \mathrm{Bd}\,S \approx \mathrm{Bd}\,S'$

$S^1 \not\approx S^1 \cup S^1 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{M} \not\approx A}}$

fact 対偶

$A \not\approx \mathbb{M}$

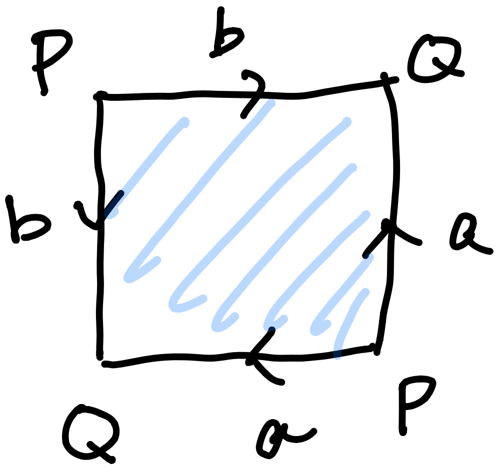
BdA をこえない限り
オモテからウラに行くことはできない

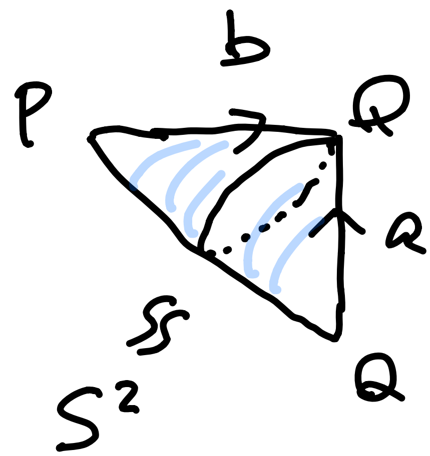
ある点から出発して
BdM をこえずに
出発点のウラ側に行くことができる

$\mathbb{M}$: ウラとオモテのないヤツ

球面・トーラス・クラインの壺

S^2

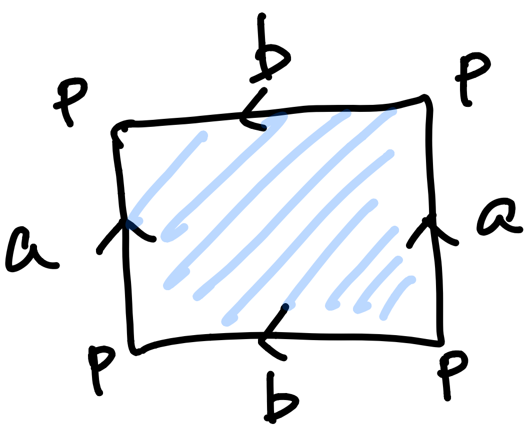




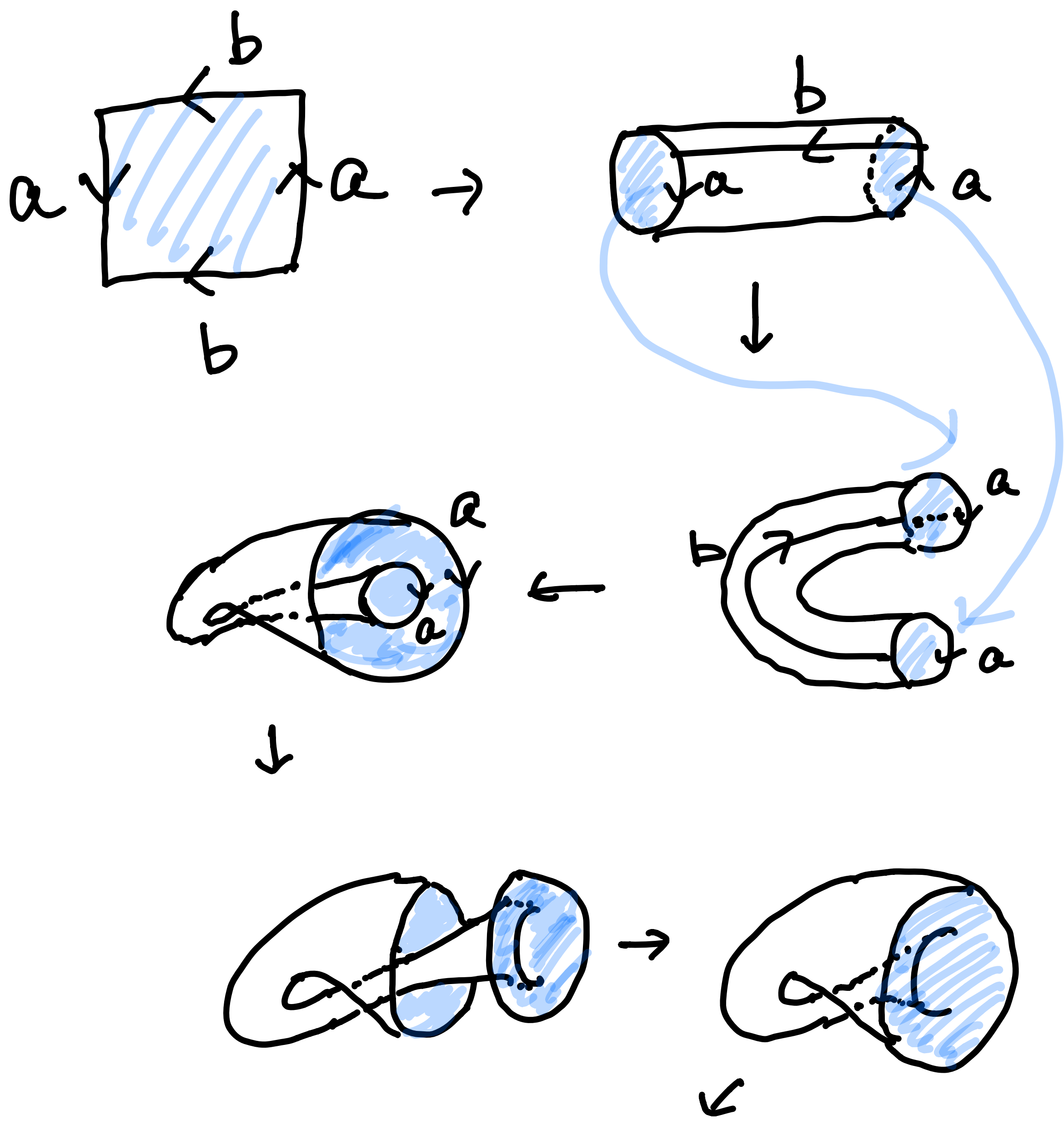
三角くじ

$$a^{-1} a b^{-1} b = 1$$

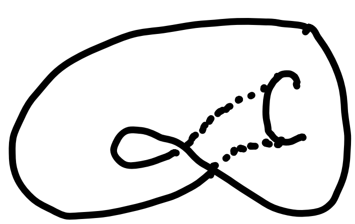
T^2



K $abab^{-1}=1$

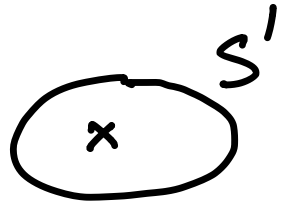


$\mathbb{R}^4$では
実現可能



$\mathbb{K}$

ex. $\mathbb{R}^2$ではできないが $\mathbb{R}^3$ではできる



$\mathbb{R}^2$で

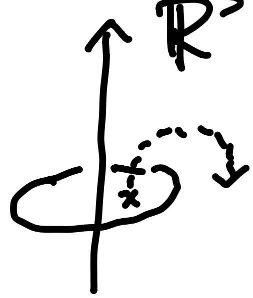
S^1にとじこめられた

S^1をつきやぶらない限り

にげられない

でも，

$\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^3$において自由に

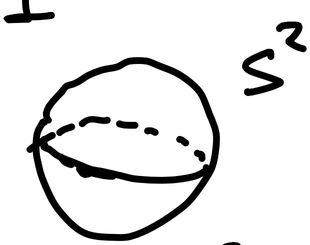
にげだせる

S^1を$\mathbb{R}^3$における xy平面上の図形

次元を上げても同様.

$$S^2 : x^2+y^2+z^2=1$$

は閉じている.



S^2内に閉じこめられた人間は S^2を

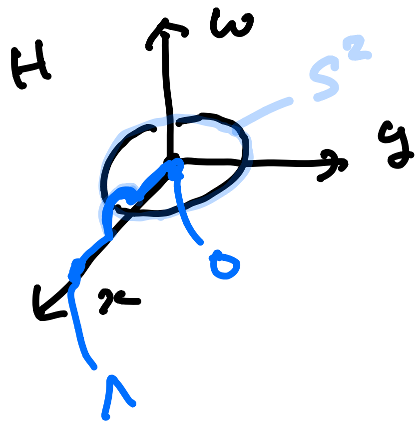
突き破らない限り S^2外に出られない

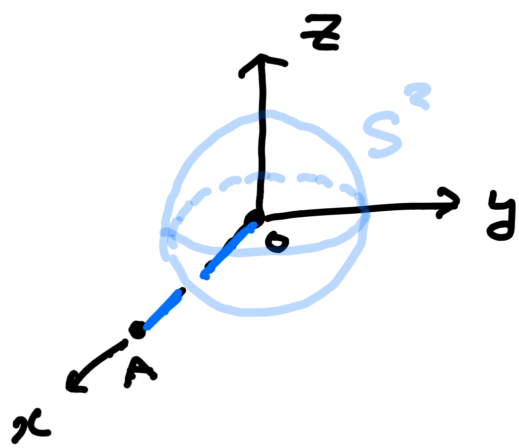
ところが、$\mathbb{R}^4$ 内では、$(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$

$$S^2 = \{(x, y, z, 0) : x^2+y^2+z^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$H = \{(x, y, 0, w) : x, y, w \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$S^2 \cap H = \{(x, y, 0, 0) : x^2+y^2=1\}$$





(P34)

定理 ジョルダン・ブラウワーの分離定理
(ジョルダンの閉曲線定理の $\mathbb{R}^3$ 版)

$\mathbb{R}^3$ の任意の閉曲面は $\mathbb{R}^3$ を
2つの部分に分割する

(閉曲面：無限に大きくなく、2つ以上の
離れた部分に分かれていない、どの点の近傍も 平面に近似できる)

$S \subset \mathbb{R}^3$: 閉曲面

$\Rightarrow$ S: ウラ, オモテが区別できる曲面

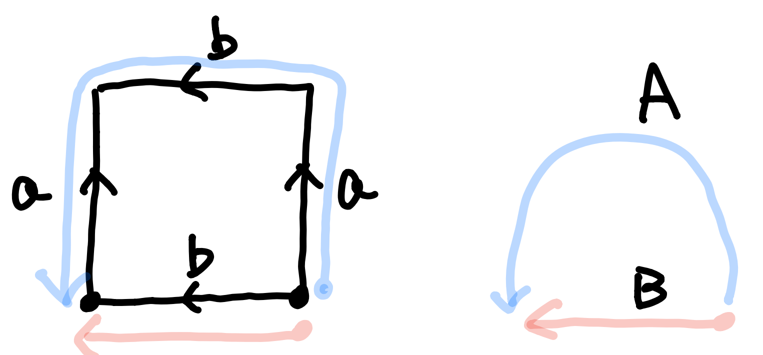
対偶: ウラ, オモテがない閉曲面

(conn. closed, $\mathrm{Bd}\, S = \phi$)

は, $\mathbb{R}^3$の閉曲面ではない.

($\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}^3$の閉曲面 でない.)

展開図と表示式の同値関係



$$A = aba^{-1}, \quad B = b$$

始点と終点が同じものは同じ道とすると

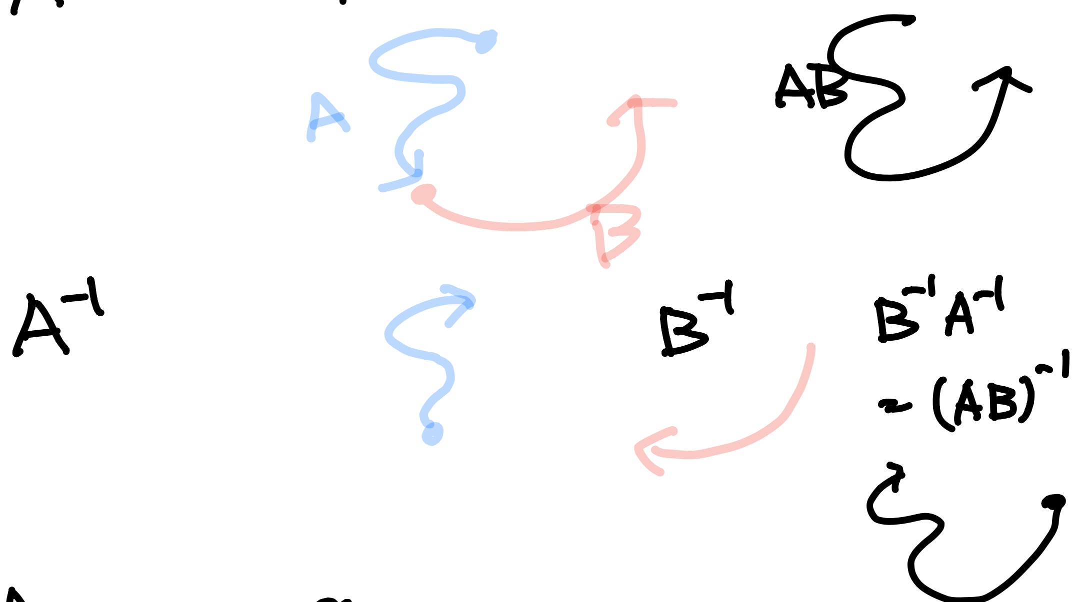
$$A = B$$

$$aba^{-1} = b \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} = 1$$

A, B を 展開図の経路

Bの始点とAの終点が同じとき

AとBは接続可能



$$A = x_1 x_2 x_3$$

$$A^{-1} = (x_1 x_2 x_3)^{-1} = x_3^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

長さ0の道(動かない道)を 1

と表す.

(1) $A1 = 1A = A$

(2) $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$

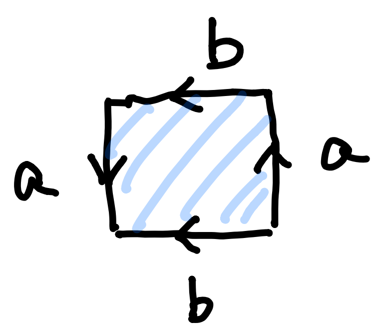
(3) $(AB)C = A(BC)$

T^2: $\underline{aba^{-1}b^{-1} = 1}$ 同値

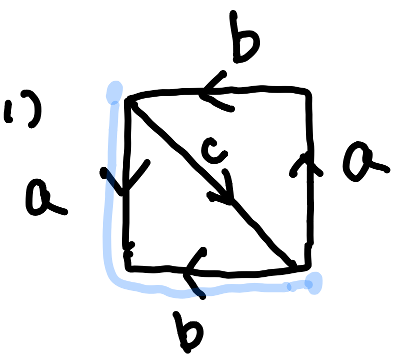
$\Leftrightarrow$ $\underline{ab = ba}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{曲面 } S, S' \text{ の展開図が同値} \\ \Leftrightarrow \quad S \approx S' \quad \text{位相同型.}\end{array}}$

$\mathbb{K}$: $abab^{-1} = 1$

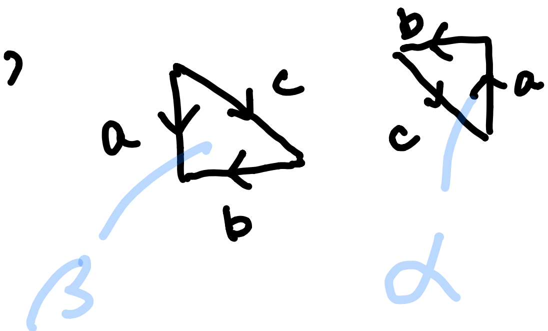


(1)



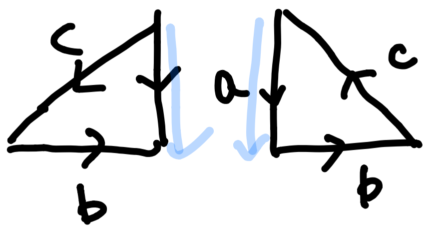
$ab^{-1} = c$

(2)



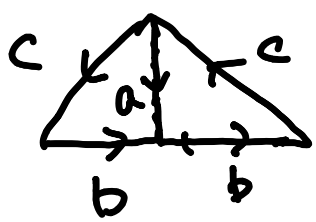
$$\begin{cases} abc = 1 \\ ab^{-1} = c \end{cases}$$

(3)



$$\begin{cases} abc = 1 \\ a = cb \end{cases}$$

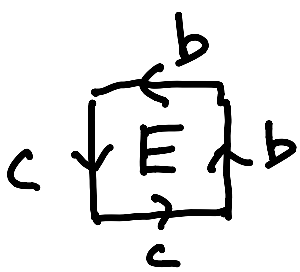
(4)



$$cbbc = 1$$

$$\Rightarrow c^{-1}cbbc = c^{-1}$$

$$\Rightarrow bbcc = 1$$



$$bbcc = 1$$

$$(aabb = 1)$$

展開図 E から K をつくる

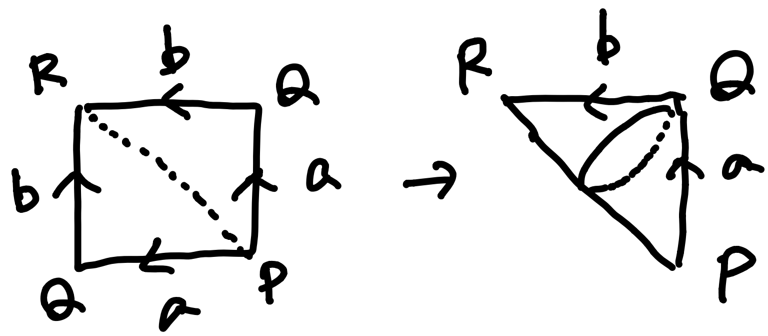
$f : K \to K$ 位相同型

変形

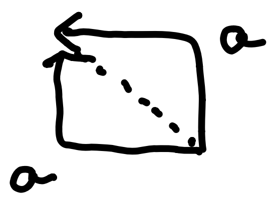
$\mathbb{K} \sim K$ $\quad \begin{cases} abab^{-1} = 1 \\ aabb = 1 \end{cases}$ は同値

S^2 の表示

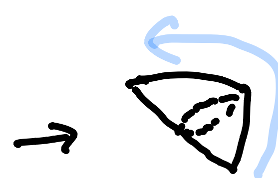
$a^{-1}abb^{-1} = 1 \Leftrightarrow aa^{-1} = 1$



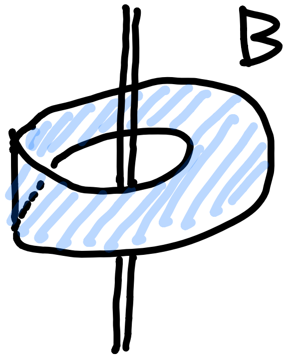
$a^{-1}abb^{-1} = 1$



$aa^{-1} = 1$



$$a^{-1}a\,bb^{-1} = 1 \Rightarrow a^{-1}a = 1$$
$$\Rightarrow a = a$$
$$\Rightarrow aa^{-1} = aa^{-1}$$
$$\Rightarrow aa^{-1} = 1$$

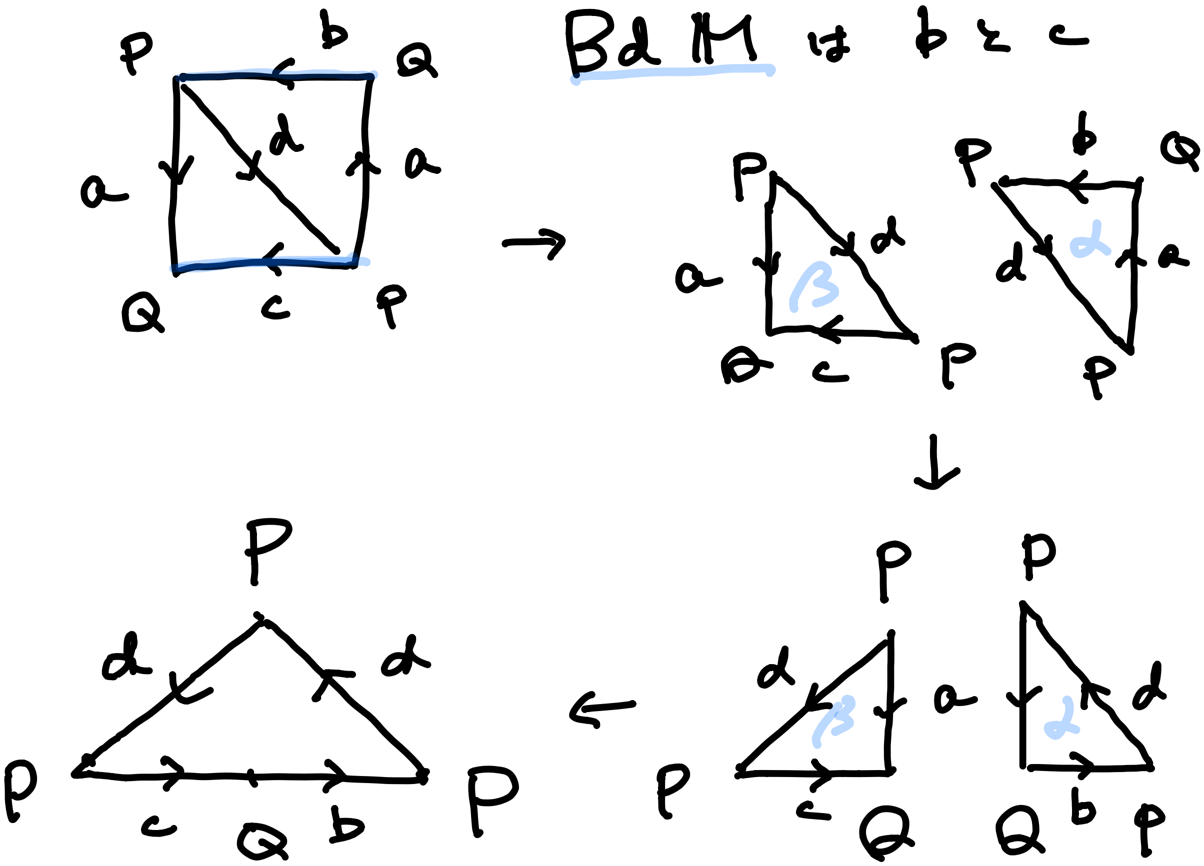


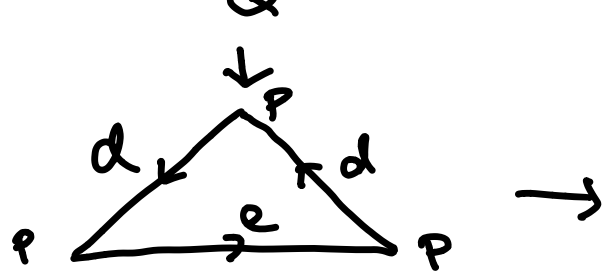
Bd M ≈ S^1

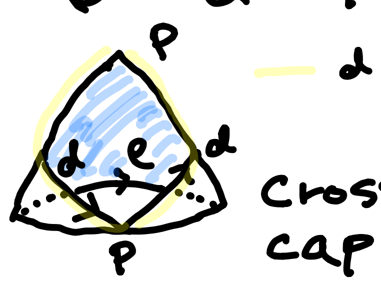
Mは棒のまわりを2周している

M を S^1 に位相的に変形

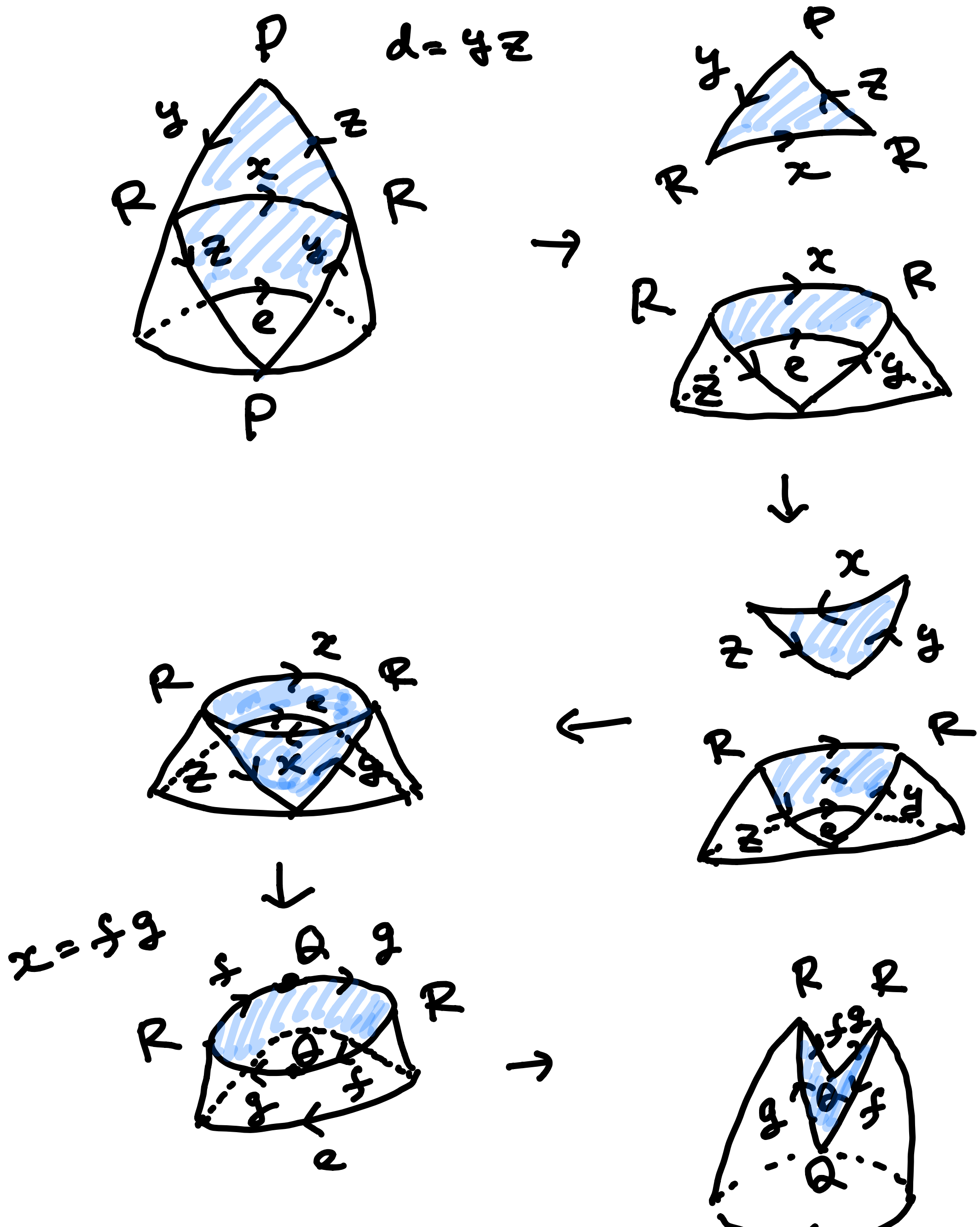
Bd M は b と c







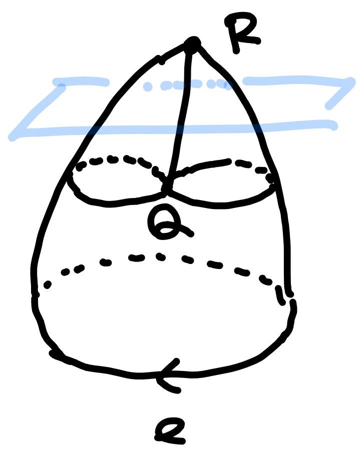
cross cap

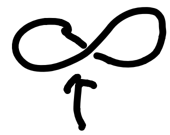


Cross cap M

$\mathbb{R}^3$ では f と f を
はりあわせたあとに
g と g をはることは
できない

Cross cap $\cap$ $\mathbb{R}^4$



$\rightarrow$ 

$\mathbb{R}^4$では交っていない

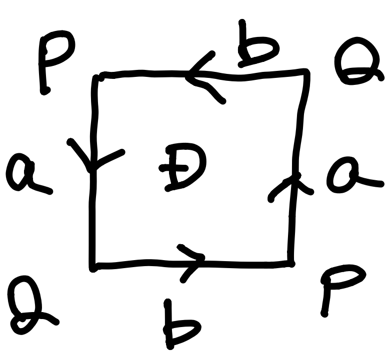
$\mathbb{R}^4$では ∞ ではなくて 単純閉曲線

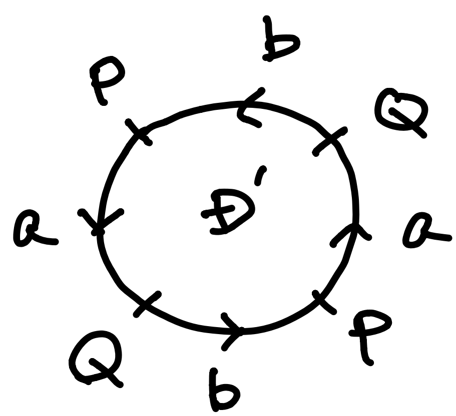
Crosscap Mは Möbius band $\mathbb{M}$の境界をねじれのない円S^1に位相的に変形したもの $(\mathbb{M} \simeq M)$

P 53

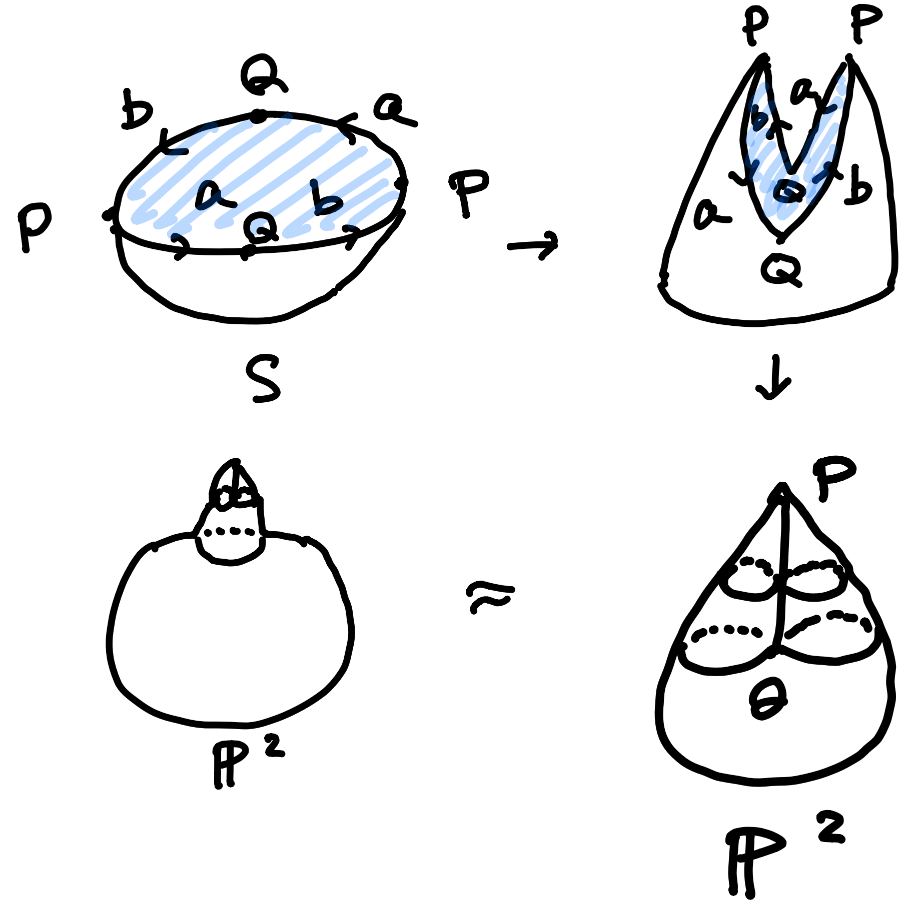
射影平面 $\mathbb{P}^2$

$abab = 1$





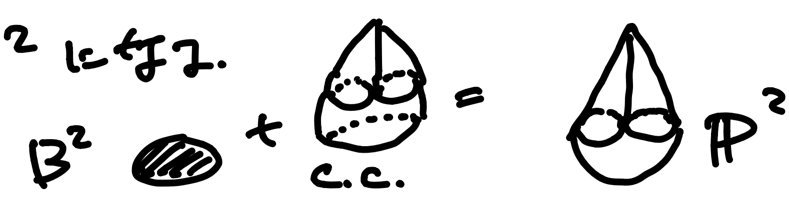
$ab = c \Rightarrow cc = 1$



$\mathbb{P}^2$: 半球面 S の上部を Crosscap の形に閉じてできる閉曲面

$\Rightarrow \quad \mathbb{B}^2 \cup \text{Crosscap}\, M = \mathbb{P}^2$

Bd $\mathbb{B}^2$ と Bd M とをはりあわせると $\mathbb{P}^2$ になる.

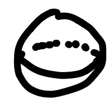


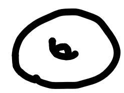
4辺形展開図からできる曲面

$\mathbb{B}^2$ $abcd=1, a=1$ ori. 

$\mathbb{A}$ $aba^{-1}c^{-1}=1$ ori. 

$\mathbb{M}$ $abac^{-1}=1$ unori. 

$\mathbb{S}^2$ $abb^{-1}a^{-1}=1$ $aa^{-1}=1$ ori. 

$\mathbb{T}^2$ $aba^{-1}b^{-1}=1$ ori. 

$\mathbb{K}$ $abab^{-1}=1$ unori. 

$\mathbb{P}^2$ $abab=1, aa=1$ unori.