基礎数学02　集合論の基礎

1　集合

Ω: 全体集合 (universe)

わたしたちが当面の関心を持つ問題を扱うのに十分な大きさを持つ集合を全体集合 Ω と呼ぶことにする．Ω の部分集合全体を冪集合 2^{Ω} と記す．冪集合には空集合 ϕ や全体集合 Ω を含む． ここで空集合 ϕ とはメンバーを含まない集合．ちなみに，集合を元とみなす集合を族 (family) と呼ぶ．

部分集合:
A が Ω の部分集合とは，$A \subset \Omega$ を満たすもの．

包含関係「$\subset$」の意味:
$A \subset \Omega$ とは $x \in A \Rightarrow x \in \Omega$ が成立すること

例 1.1 $\Omega = \{1, 3, 5\}$ のとき，$2^{\Omega} = \{\{\phi\}, \{\Omega\}\, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}\}$
$|2^{\Omega}| = 2^{|\Omega|}$

$A = B$ とは $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$ となること

$A = B$ を示すことは
$(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \quad \wedge \quad (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)$ という両側を示すこと．

$A = B$ という状況は A と B のメンバーが一致すること．

問 1.1 $A \neq B$ を示すには何をすればよいか?

解 1.1 $A = B$ の否定だから，$A \subset B$ でないこと，もしくは，$B \subset A$ でないこと．そのどちらかを示せばよい．
「$A \subset B$ でないこと」を示すには，$\exists x \in A \Rightarrow x \notin B$ を示せばよい．

2　Bool 代数

Gerge Boole は 19 世紀英国の数学者．2^{Ω} に演算を導入した．(49 歳で死んじゃっているんですね)

$A \cup B = \{\omega \in \Omega; \omega \in A \vee x \in B\} \in 2^{\Omega}$

$A \cap B = \{\omega \in \Omega; \omega \in A \wedge x \in B\} \in 2^\Omega$

$A \cap B \subset A \cup B$ であることに注意.

$A^c = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\} \in 2^\Omega$

$A - B = \{\omega \in \Omega; \omega \in A \wedge \omega \notin B\} \in 2^\Omega$

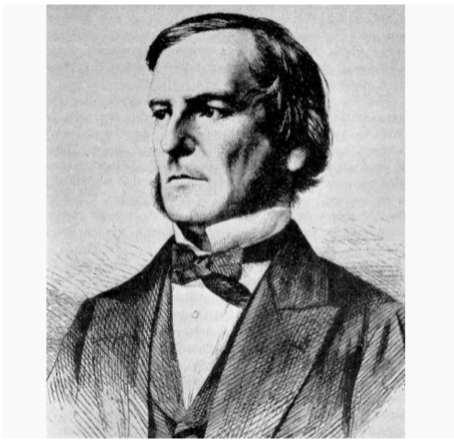

図 1: George Boole, mathematician, 1815-1864

2^Ω 上の演算 $\cup$, $\cap$, 補集合 c について次の性質を満たす.

$$
\begin{aligned}
A \cup A &= A \\
A \cap A &= A \\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\
A \cup B &= B \cup A \\
A \cap B &= B \cap A \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup \phi &= A \\
A \cap \phi &= \phi \\
A \cap \Omega &= A \\
A \cup \Omega &= \Omega \\
A \cup A^c &= \Omega \\
A \cap A^c &= \phi \\
(A^c)^c &= A \\
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\
(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c
\end{aligned}
$$

ここで$\cap$のみ (あるいは$\cup$のみ) に注目しそれを演算としてみれば交換法則や結合法則が成り立つので代数計算が可能となる.

3　上位概念　直積集合の例

全体集合Ωというユニバースを考えた. そして, そのユニバースからできる部分集合2^{Ω}というものを考えることができた. 冪集合とも呼ばれる2^{Ω}は集合の集合であり族 family と呼ばれる集合の上位概念である.　このようにあるものの上にあるものを積み上げていくことで新しい集合を規定することができる. Boole によって, 集合と集合とを代数のように演算できるようになった. もうひとつの幅広い概念の拡張の例としては直積集合というものがある.

直積集合
集合 A と集合 B があるとき,

$A \times B = \{(a, b); a \in A \wedge b \in B\}$

ここで,

$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$

と定義する.

もちろん, 直積は自然に拡張できて,

$A_1, A_2, \cdots A_n$ たちを集合としたときに,

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n); a_j \in A_j, (1 \leq j \leq n)\}$

$(a_1, \cdots, a_n) = (b_1, \cdots, b_n) \iff a_j = b_j, \forall j, 1 \leq j \leq n$

注意:　$A \times B$ と $B \times A$ とは別物である.

このようなひとつの集合があれば, それの自然な拡張や上位概念が簡単に創造できることが現代数学の著しい特徴となっている.

問 3.1 全体集合Ωとその部分集合A及びBから作れる集合を書き出そう.

解 3.1 $\Omega, A, B, A^c(= \Omega - A), B^c(= \Omega - B), A \cup B, A^c, A - B(= A \cap B^c), B - A(= B \cap A^c),$
$(A \cup B)^c(= A^c \cap B^c), (A \cap B)^c(= A^c \cup B^c), (A - B)^c(= B \cup A^c), (B - A)^c(= A \cup B^c),$
$A \times B, B \times A, A \times A \cap B$ など

4　添え字集合

$\lambda \in \Lambda$ についてΛを添え字集合 (index set) とする.
(添え字集合は有限集合とは限らない.)

$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

$A_\lambda \in 2^\Omega, \lambda \in \Lambda$ について

$$\begin{aligned}
\omega \in \bigcup A_\lambda &\iff \omega \in A_\lambda \ \ for \ \ \exists\lambda \in \Lambda \\
\omega \notin \bigcup A_\lambda &\iff \omega \notin \lambda \ \ for \ \ \forall\lambda \in \Lambda \\
\omega \in \bigcap A_\lambda &\iff \omega \in A_\lambda \ \ for \ \ \forall\lambda \in \Lambda \\
\omega \notin \bigcap A_\lambda &\iff \omega \notin \lambda \ \ for \ \ \exists\lambda \in \Lambda
\end{aligned}$$

問 4.1

$$deMorgan: \ (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c \quad = \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \quad \text{を示せ.}$$

解 4.1

$$\begin{aligned}
\omega \in (\bigcup A_\lambda \in \Lambda)^c &\iff \omega \notin \bigcup A_\lambda \\
&\iff \omega \notin A_\lambda \ \ for \ \ \forall\lambda \in \Lambda \\
&\iff \omega \in A_\lambda^c \ \ for \ \ \forall\lambda \in \Lambda \\
&\iff \omega \in \bigcap A_\lambda^c
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c &\subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \quad \text{かつ} \\
(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c &\supset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \\
\text{よって,}\ (\bigcup A_\lambda \in \Lambda)^c &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c
\end{aligned}$$

否定と補集合との類似. *some* の否定は *any*.
「=」を示すには「⊂」と「⊃」の両側を示す.

問 4.2

$$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c \quad = \quad \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \quad \text{を示せ.}$$

解 4.2

$$\begin{aligned}
\omega \in (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c &\iff \omega \notin \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \\
&\iff \omega \notin A_\lambda \ \ for \ \ \exists\lambda \in \Lambda \\
&\iff \omega \in A_\lambda^c \ \ for \ \ \exists\lambda \in \Lambda \\
&\iff \omega \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c
\end{aligned}$$

$\therefore\ (\bigcap A_\lambda)^c = \bigcup A_\lambda^c$ 「=」を示すには「⊂」と「⊃」の両側を示すこと.

5 一般分配律

問 5.1

$$E \cap (\bigcup_{\mu \in M} B_\mu) = \bigcup_{\mu \in M} (E \cap B_\mu)$$

解 5.1

$$\begin{aligned}
\omega \in E \cap (\bigcup_{\mu \in M} B_\mu) &\iff \omega \in E \ \wedge \ \omega \in \bigcup_{\mu \in M} B_\mu \\
&\iff \omega \in E \ \wedge \ \omega \in B_\mu \ \ for \ \exists \mu \in M \\
&\iff \omega \in (E \cap B_\mu) \ \ for \ \exists \mu \in M \\
&\iff \omega \in \bigcup_{\mu \in M} (E \cap B_\mu)
\end{aligned}$$

同様に,

$$E \cup (\bigcap_{\mu \in M} B_\mu) = \bigcap_{\mu \in M} (E \cup B_\mu)$$

問 5.2

$$(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\mu \in M} B_\mu)) = \bigcup_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} A_\lambda \cap B_\mu$$

解 5.2

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\mu \in M} B_\mu) \\
&= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\mu \in M} (A_\lambda \cap B_\mu) \\
&= \bigcup_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

($A \cap B = B \cap A$ であるし $A \cup B = B \cup A$ であるから入れ替えが可能になる.)